

策划统筹：王 者 杨卫平
责任编辑：廖爱平 柳 丰
责任校对：潘 丽
封面设计：殷建华

一样的假日
不一样的收获



假日知新·寒假学习与生活

八年级数学

冬日的闹钟，总在朦胧中
打破我甜美的梦境
刺骨的寒意，堆成难以攀援的阶梯
但我相信，只要努力
就能翻山越岭，领略山那边的风景

我知道，寒风每年不断地轮回
但是，只要朝着太阳飞奔
便可迎来阳光倾泻的黎明
或累或闹，或哭或笑
不再疲惫，云淡风轻

带上父母的期盼
带上老师殷切的叮咛
带上我五彩的梦想
去收获不一样的快乐



紧扣课标要求 凸显学以致用 倡导高效学习 体验知新假日

NEW CONCEPT HOLIDAY

假日知新

寒假学习与生活

八年级
数学

华语教育 编

★系统温故知新

★生活体验知新

★趣味预习知新

★多元互动知新



答案解析 资源助学

湖南师范大学出版社

这是一个创意与智慧的展台
一片分享成功与欢乐的园地
只要你乐于创作、勇于投稿
在一样的假期里
就会收获不一样的乐趣



张家界市桑植县思源实验学校 余文艺 (指导老师 谷梅花)



湘乡市名民实验中学 左浩宇 (指导老师 邓丽)

师生作品



长沙市周南中学 肖茗 (指导老师 吴建立)



长沙市周南中学 刘婕 (指导老师 吴建立)

校园原创给力SHOW



学生作品



1	2
4	3

1. 天空 舒昊宇 (长沙市麓山国际实验学校)
2. 荷花 曾筱蕾 (长沙市麓山国际实验学校)
3. 素描 杨涵睿 (长沙市长沙县星沙中学)
4. 静物 张欣 (常德市鼎城区善卷中学)

(指导老师 刘清峨 张艳 黄雄 蒋叙民)

欢迎投稿 (投稿时请注明地区、学校、班级及指导老师, 并留下联络方式)

电子投稿: 2138195118@qq.com mikeywp@126.com
纸质投稿: 长沙市开福区北辰三角洲B1E1区5栋15楼 葛老师(收) 邮编: 410008

华语教育◎编

假日知新

寒假学习与生活

八年级 数学

审定单位: (排名不分先后)

长沙市麓山国际实验学校

长沙市湘府中学

长沙市南雅中学

长沙市田家炳实验中学

长沙市周南中学

编写人员: 沈喜华 廖俊宁 谭放军 龙 淼 李钦皋
屈林芝 姚智慧 周良兮 马湘西 倪长青
刘安帮 张立海 刘俊华

湖南师范大学出版社·长沙

图书在版编目(CIP)数据

假日知新·寒假学习与生活·八年级数学/华语教育
编. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2012.12(2022.11 重印)

ISBN 978-7-5648-1013-9

I. ①假… II. ①华… III. ①中学数学课—初中—
习题集 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 312316 号

JIARI ZHIXIN · HANJIA XUEXI YU SHENGHUO BANIANJI SHUXUE

假日知新·寒假学习与生活 八年级数学

华语教育◎编

-
- ◇策划统筹: 王 者 杨卫平
◇责任编辑: 廖爱平 柳 丰
◇责任校对: 潘 丽
◇封面设计: 殷建华
◇出版发行: 湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山
邮编/410081
电话/0731-88872751
◇经 销: 各地新华书店
◇印 刷: 湖南版艺印刷有限公司
◇开 本: 787mm×1092mm 1/16
◇印 张: 5
◇字 数: 82 千字
◇版 次: 2012 年 12 月第 1 版
◇印 次: 2022 年 11 月第 12 次印刷
◇书 号: ISBN 978-7-5648-1013-9
◇审批号: 湘发改价费〔2017〕343 号
◇定 价: 6.52 元

客服电话: 0731-85515368
微 信 号: hunanhuayujiaoyu

联系人: 蒋老师
邮 箱: 2138195118@qq.com

编者寄语

PREFACE

“千里黄云白日曛，北风吹雁雪纷纷。”亲爱的同学，期盼已久的寒假如约而至！在这岭秀松寒的冬日时光里，你心中一定充满了许多度假想法和美好期望。

假期是另一片求知的天地。同学们暂别校园，回归家庭，温习所学知识之余，将有更多的时间和机会接触广阔的社会，感受多样的生活。

假期是另一个生活的课堂。同学们走入社会，体验生活，可充分利用学习与生活结合的良好机，学以致用，实现自我规划，寻求个性发展。

这本散发着清香的新书，从形式到内容均有别于传统用书，分设学习版和生活版，两者既独立又共融，全新的理念统摄全书，独特的编排彰显创意。

1. 系统温故知新

学习版以主题形式呈现，主要依据课程标准并综合相关教材知识点，系统梳理和有机整合上学期所学内容，引导同学们循序渐进并有所侧重地温习所学知识，巩固基本知能，帮助同学们在间隔一个假期之后，能够轻松顺利地融入新学期的学习之中。

2. 生活体验知新

“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”全书注重引导同学们参与社会实践，培养自主探究精神。生活版独立成篇，结合学科知识和城乡特点，精心设计栏目，密切联系学生的实际生活，并设置富于开放性、趣味性、多样性的主题体验活动或现实思考题，引领同学们在轻松愉悦的体验中思考生活、发现生活，并学会解决生活问题，形成新的学习理念，让同学们在社会生活环境中获得更多的自主成长空间。

3. 趣味预习知新

根据下学期学习的内容及要求，全书将某些知识背景和方法准备穿插于学习版和生活版内容之中，通过创设富含趣味性的情境，引导同学们自主预习，旨在激发同学们新的求知欲和探究欲，并为迎接新学期的学习做好心理准备。

4. 多元互动知新

全书将相关学科内涵有机融合，形成了学科互动、亲子互动、师生互动和编读互动等多元互动模式，使同学们在互动之中体味学习的快乐和生活的美好；同时，各科均设置了形成性阶段评价表和终结性评价卷，有利于同学们返校后学科老师对同学们做出假期综合评价，了解同学们新的进步。

一样的假日，不一样的收获。衷心祝愿同学们在本书的陪伴下，度过一段快乐如歌、感悟良多的美好假期。

编者
2022年11月

目录

Contents >>

学习版

温故知新篇 /01

主题一 因式分解及分式的计算 /01

主题二 解分式方程及运用分式方程解应用题 /07

主题三 三角形及全等三角形 /13

主题四 实 数 /20

主题五 不等式和不等式组 /26

主题六 二次根式 /33

预习知新篇 /40

预习一 勾股定理及逆定理 /40

预习二 变化多样的四边形 /47

假期自主检测与评价 /53

生活版

☆ 开场白 /59

启程：向着梦想生活出发 /59

☆ 数学欣赏 /60

数学是科学的皇后 /60

☆ 数说天下 /63

科技视界 /63

文体视窗 /64

生活视角 /65

新奇视点 /66

☆ 数字探秘 /67

神奇的数字：142857/67

☆ 数学感悟 /70

透过数学故事感悟数学真谛 /70

☆ 数学案例 /72

一个小数点与一场大悲剧 /72

数学家巧破杀人案 /74

☆ 生活实践 /76

初中生如何消费压岁钱情况调查 /76

一样的假日
不一样的收获



温故知新篇

假日导学 “温故而知新，可以为师矣。”亲爱的同学，快乐假日如约而至！我们根据数学学科及假日环境的特点，结合上学期所学知识，精心设计了6个主题。每个主题按“主题概说—典例重温—演练平台”的编排体系展开，重点对学习要点、解题规律及方法技巧等作了系统梳理和归纳总结，旨在帮助你在假期中通过复习和练习，做到温故而知新。你可根据实际情况，制订假期个人学习计划，自主灵活地安排好每天的学习与生活。愿《假日知新》陪伴你度过一段快乐如歌的缤纷假期。

主题一

因式分解及分式的计算

主题概说

1. 因式分解是代数变形的有力工具，因此学习因式分解时一定要熟练掌握常用的基本方法，如提公因式法、平方差公式、完全平方公式和十字相乘法。因式分解学得好，就为我们学习分式打下了坚实的基础。
2. 分式是继整式后又一类重要的代数式，这也是因式分解的重要应用点。分式的计算包括分式的加减乘除混合运算，当分式的分子、分母都为多项式时，可先分解因式，再进行计算或求值；在求分式的值时应先将所求代数式化简，然后代入求值；分式运算的化简要化成整式或最简分式。
3. 零指数幂 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 的意义，即任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1；负整数指数幂 $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0, p \text{ 为正整数})$ ，要特别注意 $a \neq 0$ 的附加条件。用科学记数法表示一些绝对值较小的数，即将它们表示成 $a \times 10^{-n}$ 的形式，其中 n 是正整数， $1 \leq |a| < 10$ 。引进了零指数幂和负整数指数幂后，指数的范围就从正整数扩大到了全体整数，我们以前学习过的各种幂的性质在整数范围内仍然成立。



典例重温

【例1】给出三个多项式： $\frac{1}{2}x^2+2x-1$ ， $\frac{1}{2}x^2+4x+1$ ， $\frac{1}{2}x^2-2x$. 请选择你最喜欢的两个多项式进行加法计算，并把结果因式分解.

【点拨】先把其中的任意两个多项式进行加法运算，再进行因式分解，可用提公因式法或公式法.

【解答】

【小结】因式分解是中学数学中一种重要的恒等变形，也是解决许多数学问题的重要途径和方法.

因式分解是整式乘法的逆运算，它要比解整式乘法难，难在不明确在进行乘法运算时，有哪些项是经过合并的. 因此要活用各种因式分解的方法.

常用的方法除教材中介绍的提公因式法、公式法外还有：

(1) 分组分解法；(2) 十字相乘法；(3) 拆(除)项法；(4) 换元法；(5) 待定系数法.

【例2】已知 $m-2n=8$ ， $mn=6$ ，求代数式 $3m^2n-6mn^2+18n-9m$ 的值.

【点拨】本题若从条件入手求出 m, n 的值较难，若将所求代数式分解因式，再整体代入即可求出其值.

【解答】

【小结】因式分解是整式恒等变形的重要手段，在某些求多项式的值的问题中，先将所给多项式进行因式分解，使其含有已知条件中的代数式，再按整体代入的思想进行求值，这是一种重要的解题方法.

【例3】已知 $\frac{x+y-z}{z} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{-x+y+z}{x}$, 且 $xyz \neq 0$, 求分式 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ 的值.

【点拨】比例系数法, 设 $\frac{x+y-z}{z} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{-x+y+z}{x} = k$.

【解答】

【小结】分式的化简求值的常用技巧:

(1) 整体代入法: 将已知条件作为一个整体代入经过化简整理后的分式中, 求出分式的值, 这种方法叫做整体代入法.

(2) 比例系数法: 对于比例式, 可设定一个比例系数, 并将比例式中各字母都转化为用比例系数表示的代数式, 然后代入所求的分式中化简求值. 这种方法叫做比例系数法.

【例4】已知 $\frac{3x^2-7x+2}{(x-1)(x+1)} = 3 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, 其中 A, B 为常数, 则 $4A-2B = \underline{\hspace{2cm}}$.

【点拨】将等式右边通分, 使等式左、右两边分母相同. 计算右边的分子(并按 x 的降幂排列), 然后比较左、右两边分子的同类项系数并列方程组求解.

【解答】

【小结】建立方程组是解答本题的关键.

分式的恒等证明的一般方法, 即欲证 $A=B$, 常采用以下方式:

(1) 由繁到简, 从比较复杂的一边向简单的一边推导;

(2) 作差(或比), 即 $A-B=0$ 或 $\frac{A}{B}=1$;

(3) 应用传递性, 由 $A=C, B=C$, 推出 $A=B$.



一、选择题

1. 下列各式从左到右的变形中,是因式分解的为 ()

A. $x(a-b) = ax-bx$

B. $x^2-1+y^2 = (x-1)(x+1)+y^2$

C. $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

D. $ax+bx+c = x(a+b)+c$

2. 把 x^3-xy^2 分解因式,正确的结果是 ()

A. $(x+xy)(x-xy)$

B. $x(x^2-y^2)$

C. $x(x-y)^2$

D. $x(x-y)(x+y)$

3. 下列各式中能用完全平方公式分解的是 ()

① x^2-4x+4 ; ② $6x^2+3x+1$; ③ $4x^2-4x+1$; ④ $x^2+4xy+2y^2$; ⑤ $9x^2-20xy+16y^2$.

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①⑤

4. 在 $\frac{y}{2}, \frac{2x^2}{x}, \frac{x^2+1}{2}, \frac{3xy}{\pi}, \frac{3}{x+y}, a+\frac{1}{m}$ 中,分式的个数为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

5. 把分式 $\frac{-x+1}{x+1}$ 变形得 ()

A. $\frac{x+1}{-x+1}$

B. $-\frac{x-1}{x+1}$

C. $\frac{x-1}{x+1}$

D. $\frac{x+1}{x-1}$

二、填空题

6. 当 x _____ 时,分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 有意义;当 x _____ 时,分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为 0.

7. 一种细菌半径是 0.000 121 毫米,用科学记数法表示为 _____ 毫米.

8. 分式 $\frac{2}{3m^2}, \frac{1}{6mn^2}$ 的最简公分母是 _____; 分式 $\frac{1}{x^2-3x}, \frac{2}{x^2-9}$ 的最简公分母是 _____.

9. 如果 $9x^2+kx+16$ 是一个完全平方式,那么 k 的值是 _____.

10. 如果 $a-\frac{1}{a}=3$, 那么 $a^2+\frac{1}{a^2}=$ _____.

三、解答题

11. 因式分解:

(1) $2(x-y)^2 - x + y$;

(2) $81 - 9x^2$;

(3) $-2a^3 + 12a^2 - 18a$;

(4) $x^2 - 5x - 6$.

12. 把下列各式分解因式:

(1) $x(x-5)^2 + x(-5+x)(x+5)$;

(2) $(a+2b)^2 - a^2 - 2ab$;

(3) $-2(m-n)^2 + 32$;

(4) $-x^3 + 2x^2 - x$.

13. 计算:

(1) $2 \cdot 023^0 - 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

(2) $6a^{-1}b^{-2} \cdot (-3ab^{-3})^{-2}$;



$$(3) 8x^2 \cdot \left(-\frac{3x}{4y^3}\right) \div \left(-\frac{2x^2}{y}\right);$$

$$(4) \frac{a^2+2a}{1+a} \div \left(a-1-\frac{3}{a+1}\right).$$

14*. 探究拓展题(供学有余力的同学选做).

已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, 求分式 $\frac{-x+xy+y}{2x+7xy-2y}$ 的值.



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

主题二

解分式方程及运用分式方程解应用题

主题概说

1. 解分式方程的基本思想是:把分式方程化为整式方程. 其解题的一般方法和步骤为:①去分母,即在方程两边乘以_____,把原方程化为整式方程;②解这个整式方程;③验根,把解整式方程所得的解代入最简公分母,如果最简公分母等于0,则这个解为原方程的增根;如果最简公分母不等于0,这个解是原方程的根.

2. 分式方程的应用主要是列方程解应用题,它与学习一元一次方程时列方程解应用题的思路和方法基本是一样的,不同的是,因为有了分式的概念,表示数与数的相互关系的代数式,不受整式的限制而已. 因此,列分式方程解应用题的方法和步骤与列一元一次方程解应用题的方法和步骤基本相同,一般情况下,在学习列分式方程解应用题之前,先复习并归纳得出列一元一次方程解应用题的方法和步骤,由此归纳出列分式方程解应用题的方法和步骤:①审清题意;②设未知数;③根据题意找相等关系,列出(分式)方程;④解方程,并_____;⑤作答.

注意:①由于列的方程是分式方程,而分式方程在解的过程中会产生增根,故必须验根. ②检验是否符合题意,不符合题意的解必须舍去,这一点与整式方程的应用题一样.

典例重温

【例1】解方程 $\frac{4}{x^2-1} + \frac{x+2}{1-x} = -1$.

【点拨】找出最简公分母 $(x+1)(x-1)$, 去分母, 化为整式方程求解.

【解答】

【小结】分式方程中的未知数都有各自的取值范围,因此,只能在其取值范围内求方程的根.由于在解分式方程时,方程两边同乘以最简公分母,扩大了未知数的取值范围,可能产生增根,故解分式方程(组)时一定要验根.

【例2】若关于 x 的方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{x+m}{2-x} = 2$ 有增根,则 m 的值是_____.

【点拨】先把分式方程化为整式方程,再根据分式方程的增根就是使最简公分母等于0的未知数的值求出 x 的值,再代入计算 m 的值.

【解答】

【小结】解分式方程时,产生了使分母等于0的根,这个根就是增根.解这类问题,先把分式方程转化为整式方程,然后将增根代入整式方程,可求出方程中未知系数的值.而用去分母法解分式方程的一般步骤为:(1)整理;(2)去分母,把分式方程化成整式方程;(3)解整式方程;(4)检验,把整式方程的根代入最简公分母,使最简公分母为零的根就是原方程的增根,应舍去.

【例3】烟台享有“苹果之乡”的美誉.甲、乙两超市分别用3 000元以相同的进价购进质量相同的苹果.甲超市的销售方案是:将苹果按大小分类包装销售,其中大苹果400千克,以进价的2倍价格销售,剩下的小苹果以高于进价的10%销售.乙超市的销售方案是:不将苹果按大小分类,直接包装销售,价格按甲超市大、小两种苹果售价的平均数定价.若两超市将苹果全部售完,其中甲超市获利2 100元(其他成本不计).问:

(1)苹果进价为每千克多少元?

(2)乙超市获利多少元?并比较哪种销售方式更合算.

【点拨】(1)先设苹果进价为每千克 x 元,根据两超市将苹果全部售完,其中甲超市获利2 100元列出方程,求出 x 的值,再进行检验即可求出答案;(2)根据(1)

求出每个超市苹果总量,再根据大、小苹果售价分别为 10 元和 5.5 元,求出乙超市获利多少元,再与甲超市获利 2 100 元相比较即可.

【解答】

【小结】销售问题等量关系

(1) 利润 = 售价 - 进价; (2) 利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\%$. 打 n 折, 即标价 $\times \frac{n}{10}$.



一、选择题

1. 满足方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2}$ 的 x 值是 ()
 A. 1 B. 2 C. 0 D. 没有
2. 把分式方程 $\frac{2}{x} - \frac{x}{x+1} = 1$ 化为整式方程正确的是 ()
 A. $2(x+1) - x^2 = 1$ B. $2(x+1) + x^2 = 1$
 C. $2(x+1) - x^2 = x(x+1)$ D. $2x - (x+1)^2 = x(x+1)$
3. 若分式方程 $\frac{x}{x-4} = 2 + \frac{a}{x-4}$ 有增根, 则 a 的值为 ()
 A. 4 B. 2 C. 1 D. 0
4. 已知 $e = \frac{m-a}{n-a}$ ($e \neq 1$), 则 a 等于 ()
 A. $\frac{m-n}{1-e}$ B. $\frac{n-me}{1-e}$ C. $\frac{m-ne}{1-e}$ D. 以上答案都不对



5. 某校用 420 元钱到商场去购买某消毒液,经过还价,每瓶便宜 0.5 元,结果比用原价多买了 20 瓶,求原价每瓶多少元? 设原价每瓶 x 元,则可列方程为()

A. $\frac{420}{x} - \frac{420}{x-0.5} = 20$

B. $\frac{420}{x-0.5} - \frac{420}{x} = 20$

C. $\frac{420}{x} - \frac{420}{x-20} = 0.5$

D. $\frac{420}{x-20} - \frac{420}{x} = 0.5$

二、填空题

6. 方程 $\frac{3-x}{x-4} + \frac{1}{4-x} = 1$ 的解是_____.

7. 当 $x =$ _____ 时,分式 $\frac{4}{x-4}$ 与 $\frac{3}{x-1}$ 的值相等.

8. 已知关于 x 的方程 $\frac{x+m}{m(x-1)} = \frac{2}{3}$ 的解为 $x = -2$, 则 $m =$ _____.

9. 关于 x 的方程 $\frac{x}{x-3} - \frac{2a}{x-3} = 2$ 有增根,则增根为_____.

10. 若方程 $\frac{3}{x+3} = \frac{2}{x+k}$ 有负数根,则 k 的取值范围是_____.

三、解答题

11. 解分式方程:

(1) $\frac{5}{x-1} = \frac{1}{x+3}$;

(2) $\frac{1-x}{2-x} - \frac{3}{x-2} = 2$;

(3) $\frac{2}{x+3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2x+6}$.

12. 甲、乙两人在相同时间内各加工完成了 168 个零件和 144 个零件, 已知每小时甲比乙多加工 8 个零件, 求甲、乙两人每小时各加工多少个零件?

13. 已知 $T = \frac{a^2 - 9}{a(a+3)^2} + \frac{6}{a(a+3)}$.

(1) 化简 T ;

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 且它的面积为 9, 求 T 的值.



14*. 探究拓展题(供学有余力的同学选做).

我市某校为了创建书香校园,去年购进一批图书. 经了解,科普书的单价比文学书的单价多4元,用12 000元购进的科普书与用8 000元购进的文学书本数相等. 今年文学书和科普书的单价与去年相比保持不变,该校打算用10 000元再购进一批文学书和科普书,问购进文学书550本后最多还能购进多少本科普书?



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

主题三

三角形及全等三角形

主题概说

1. 三角形及有关概念

(1) 三角形是最简单但又是最基本的几何图形. 按照内角的大小可分为锐角三角形、直角三角形、_____三角形; 按照边的关系可分为不等边三角形和等腰三角形, 而等腰三角形又可分为底边和腰不相等的等腰三角形、_____三角形; (2) 三角形中任意两边之和大于第三边; (3) 三角形的三条重要线段(中线、角平分线、高); (4) 三角形具有稳定性; (5) 三角形的内角和等于_____;

(6) 三角形外角性质(任意一个外角等于与它不相邻的两个内角之和).

2. 多边形及其内角和与外角和

(1) 多边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$; (2) 多边形的外角和等于_____.

3. 全等三角形是平面几何内容的基础, 是研究特殊三角形、四边形等图形的有力工具, 是解决与线段、角相关问题的一个出发点. 运用全等三角形, 可以证明线段相等, 线段的和、差、倍、分关系, 角相等, 两直线位置关系等常见的几何问题.

4. 全等三角形的判定方法有: 边边边、边角边、_____, 角角边、HL. 应特别注意的是不能用边边角证明三角形全等.

典例重温

【例1】在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中, 下列条件: ① $BD = DC, AB = AC$; ② $\angle B = \angle C, \angle BAD = \angle CAD$; ③ $\angle B = \angle C, BD = DC$; ④ $\angle ADB = \angle ADC, BD = DC$, 能得出 $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ 的序号是_____.

【点拨】在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中,已知一条公共边 AD ,然后根据全等三角形的判定定理确定需要添加的条件.

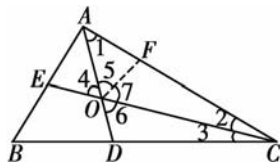
【解答】

【小结】要正确理解全等三角形判定的条件,依照条件作出合理的判断.特别注意:

- (1) 两边及其中一边所对的角对应相等的两个三角形不一定全等.
- (2) 三个角对应相等的两个三角形不一定全等.

【例2】如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, AD, CE 分别平分 $\angle BAC, \angle ACB$. 求证: $AC = AE + CD$.

【点拨】在 AC 上截取 $AF = AE$,连接 OF ,再设法证明 $CF = CD$.



【解答】

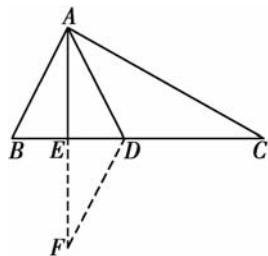
【小结】证明线段和差问题常用的方法:

- (1) 截长法:在第三条线段上截下一段使其等于两条短线段中的一条,再证明剩余部分与另一条相等.
- (2) 补短法:把两条线段中的一条补到另一条线段上去,证明所得新线段与第三条线段相等.

【例3】如图,在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上的一点,且 $CD = AB$, $\angle BAD = \angle BDA$, AE 是 $\triangle ABD$ 的中线. 求证: $AC = 2AE$.

【点拨】欲证 $AC = 2AE$, AE 是 $\triangle ABD$ 的中线,把 AE 加倍延长到 AF ,使 $AF = 2AE$.

【解答】



【小结】证明倍分关系的常用方法:

(1) 加倍:作出两倍的线段,证明它与较长的线段相等.

(2) 折半:作出较长线段的一半,证明它与较短的线段相等.

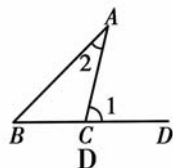
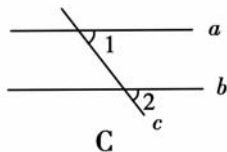
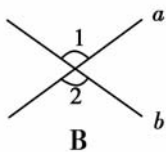
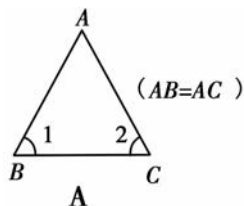


一、选择题

1. 下列各组数可能是一个三角形的三边长的是 ()

- A. 1, 2, 4 B. 4, 5, 9 C. 4, 6, 8 D. 5, 5, 11

2. 如图所示的图形中, $\angle 1$ 大于 $\angle 2$ 的是 ()



3. 下列说法正确的是 ()

- A. “作线段 $CD = AB$ ” 是一个命题
 B. 三角形三条边的垂直平分线相交于一点
 C. 命题“若 $x = 1$, 则 $x^2 = 1$ ” 的逆命题是真命题
 D. “具有相同字母的项称为同类项” 是“同类项” 的定义

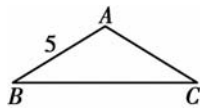
4. 如图所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C$, $AB = 5$,则 AC 的长为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5



5. 若等腰三角形的两边长分别为 4 和 8,则它的周长为 ()

A. 12

B. 16

C. 20

D. 16 或 20

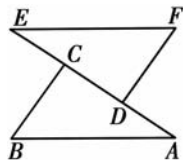
6. 如图所示, $\triangle ABC \cong \triangle EFD$,那么下列结论正确的是 ()

A. $BC = ED$

B. $EF \parallel AB$

C. $DE = AD$

D. $DF = AC$



7. 如图所示,在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $CB = CD$,若连接 AC , BD

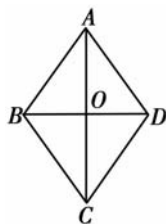
相交于点 O ,则图中全等三角形共有 ()

A. 1 对

B. 2 对

C. 3 对

D. 4 对



8. 如图所示,线段 AD 与 BC 交于点 O ,且 $AC = BD$, $AD = BC$,则下面

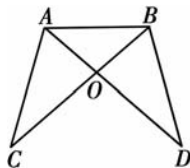
的结论中不正确的是 ()

A. $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

B. $\angle CAB = \angle DBA$

C. $OB = OC$

D. $\angle C = \angle D$



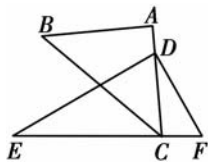
二、填空题

9. 将命题:“等角的余角相等”写成“如果……,那么……”的形式为_____.

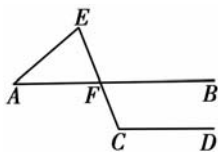
10. 下列命题:①同旁内角互补,两直线平行;②如果两个角都是直角,那么它们相等;③如果两个实数相等,那么它们的平方相等. 其中,逆命题是真命题的是_____.

(只填写序号)

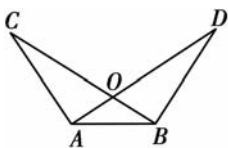
11. 将一副直角三角板按如图所示摆放,点 C 在 EF 上, AC 经过点 D , 已知 $\angle A = \angle EDF = 90^\circ$, $AB = AC$, $\angle E = 30^\circ$, $\angle BCE = 40^\circ$, 则 $\angle CDF =$ _____.



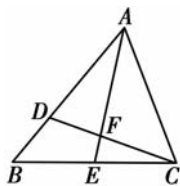
12. 当三角形中一个内角 α 是另一个内角 β 的两倍时, 我们称此三角形为“特征三角形”, 其中 α 称为“特征角”. 如果一个“特征三角形”的“特征角”为 100° , 那么这个“特征三角形”的最小内角的度数为_____.
13. 如图所示, $AB \parallel CD$, CE 交 AB 于点 F , $AE = AF$, $\angle C = 110^\circ$, 则 $\angle A =$ _____.



第 13 题图



第 14 题图

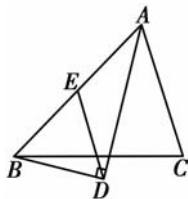


第 15 题图

14. 如图所示, 已知 $\angle C = \angle D$, $\angle CAB = \angle DBA$, AD 交 BC 于点 O , 请写出图中一组相等的线段:_____.
15. 如图所示, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, $AD = 2BD$, $BE = CE$, 设 $\triangle ADF$ 的面积为 S_1 , $\triangle CEF$ 的面积为 S_2 , 若 $S_{\triangle ABC} = 6$, 则 $S_1 - S_2 =$ _____.

三、解答题

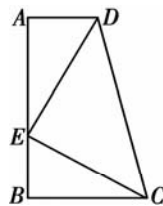
16. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $BD \perp AD$, 垂足为 D , 过 D 作 $DE \parallel AC$, 交 AB 于 E . 求证: $DE = BE$.



17. 如图, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, E 是 AB 上的一点, 且 $AE = BC$, $CE = DE$.

(1) $\text{Rt}\triangle ADE$ 与 $\text{Rt}\triangle BEC$ 全等吗? 并说明理由;

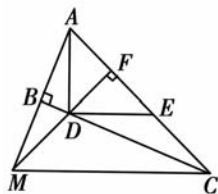
(2) $\triangle CDE$ 是不是直角三角形? 并说明理由.



18. 如图所示, $\angle ABC = 90^\circ$, D, E 分别在 BC, AC 上, $AD \perp DE$, 且 $AD = DE$. 点 F 是 AE 的中点, FD 与 AB 的延长线相交于点 M .

(1) 求证: $\angle FMC = \angle FCM$;

(2) AD 与 MC 垂直吗? 并说明理由.

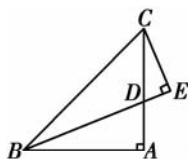


19*. 探究拓展题(供学有余力的同学选做).

如图,已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 为直角, $AB = AC$, D 为 AC 上一点, $CE \perp BD$ 于 E .

(1)若 BD 平分 $\angle ABC$, 求证 $CE = \frac{1}{2}BD$;

(2)若 D 为 AC 上一动点, $\angle AED$ 如何变化,若变化,求它的变化范围;若不变,求出它的度数,并说明理由.



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

主题四 实数

主题概说

1. 实数与生活实际的联系是非常密切的,例如,无理数是从现实世界中抽象出来的一种数,开平方运算和开立方运算也是实际中经常用到的两种运算,用有理数估计无理数的大小在现实生活中经常遇到,等等.

2. 本主题的学习要求了解算术平方根、平方根、立方根的概念,会进行平方根、立方根的运算;了解无理数和实数的概念以及实数与数轴上的点_____对应关系;了解数的范围由有理数扩大为无理数后,概念、运算等的一致性及其发展变化;能用有理数估计一个_____数的大致范围.

3. 学法点拨

(1) 注意领会平方根、算术平方根、立方根的概念及它们之间的区别与联系.

(2) 引入无理数后,将数扩展到实数范围,因此原有的相反数、倒数、绝对值等概念以及原来在有理数范围内学习的运算律、法则等均适用.

(3) 在本主题的学习中,要深刻理解并掌握类比的方法,理解新旧知识之间的区别与联系,同时,要培养动手、动脑、积极思考的习惯,并参加实践活动,明确数学来源于生活,又服务于生活.

(4) 求平方根、立方根,最好记住 $1 \sim 20$ 中各数的平方数, $1 \sim 10$ 中各数的立方数,如 $12^2 = 144$, $5^3 = 125$ 等.

典例重温

【例1】已知 a, b 都为实数,且满足 $b + \sqrt{a-3} = \sqrt{3-a} + 2$,求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值.

【解答】

【小结】若 \sqrt{a} 与 $\sqrt{-a}$ 同时有意义,则 $a=0$,且 $\sqrt{a}=\sqrt{-a}=0$,这是解题时经常用到的结论.

【例2】求下列各题中 x 的值:

$$(1) 2x^2 = 18; \quad (2) (x+1)^2 = 121; \quad (3) (2x-1)^2 = 3^2.$$

【解答】

【小结】若 $x^2=a(a\geq 0)$,则 $x=\pm\sqrt{a}$,而不能是 $x=\sqrt{a}$.

【例3】求 $\sqrt[3]{64}-\sqrt{81}+\sqrt[3]{-1}-\sqrt{-2+\frac{3}{64}}$ 的值.

【解答】

【小结】立方根的指数3不能省略,也不要再在计算过程中漏写.

【例4】解方程: $(x-3)^3-64=0$.

【解答】

【小结】通常把方程变形为 $x^3=a$ 的形式,利用求立方根的方法,求出 x .

【例5】如果实数 x, y 满足 $y=\sqrt{2x-5}+\sqrt{5-2x}+6$,求 xy 的值.

【解答】

【小结】注意 \sqrt{a} 有意义的条件 $a\geq 0$.



演练平台

一、选择题

1. $|-4|$ 的算术平方根是 ()

- A. 2 B. ± 2 C. 4 D. ± 4

2. $(-0.7)^2$ 的平方根是 ()

- A. -0.7 B. ± 0.7 C. 0.7 D. 0.49

3. 下列说法不正确的是 ()

- A. $-\sqrt{2}$ 是 2 的平方根 B. $\sqrt{2}$ 是 2 的平方根
C. 2 的平方根是 $\sqrt{2}$ D. 2 的算术平方根是 $\sqrt{2}$

4. 下列各式中, 不正确的个数是 ()

① $\sqrt{0.9} = 0.3$; ② $\sqrt{\frac{16}{9}} = \pm \frac{4}{3}$; ③ -3^2 的平方根是 -3; ④ $\sqrt{(-5)^2}$ 的算术平方根是 5

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. “ $\frac{4}{25}$ 的平方根是 $\pm \frac{2}{5}$ ”, 用数学式子可以表示为 ()

- A. $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$ B. $\pm \sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$ C. $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ D. $-\sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{2}{5}$

6. 若 $x^2 = (-3)^2$, $y^3 - 27 = 0$, 则 $x+y$ 的值是 ()

- A. 0 B. 6 C. 0 或 6 D. ± 6

7. 关于 $\sqrt{13}$ 的说法正确的是 ()

- A. 在 2 与 3 之间 B. 在 3 与 4 之间
C. 在 4 与 5 之间 D. 在 5 与 6 之间

8. 下列实数 $-\frac{1}{2}$, π , $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{9}$, $\frac{22}{7}$, $\sqrt{5}$ 中是无理数的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题

9. 平方根等于它的本身的数是_____；算术平方根等于它的本身的数是_____；立方根等于它的本身的数是_____.
10. 要使根式 $\sqrt{1-x}$ 有意义,那么 x 的取值范围是_____.
11. -8 的立方根是_____; $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.
12. 如果 $a^2=3$,那么 $a=_____$;如果 $\sqrt{a}=3$,那么 $a=_____$.
13. 若 $x^2=64$,则这个数的立方根是_____.
14. 比较大小: $\sqrt{15}$ _____4; $-\sqrt{3}$ _____ $-\sqrt{2}$.
15. $\sqrt{5}-2$ 的相反数是_____;绝对值是_____.
16. 若 m, n 满足 $(m-1)^2+\sqrt{n+3}=0$,则 $m+n=_____$.

三、解答题

17. 计算题:

$$(1) \sqrt{4-\frac{27}{49}};$$

$$(2) \sqrt[3]{-64} + |-3| + \sqrt{25};$$

$$(3) \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt[3]{0.125} - |1-\sqrt{3}|;$$

$$(4) |1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |2-\sqrt{3}|.$$



18. 求下列各式中的 x .

(1) $3(1-x)^2 = 108$;

(2) $(x+2)^3 = -\frac{27}{64}$.

19. 已知实数 a, b 满足 $\sqrt{a - \frac{1}{4}} + |2b+1| = 0$, 求 $b\sqrt{a}$ 的值.

20. 已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3 , 4 是 $3a+b-1$ 的算术平方根, 求 $a+2b$ 的值.

21*. 探究拓展题(供学有余力的同学选做).

(1) 比较大小:

$$4^2+3^2 \quad 2 \times 4 \times 3, (-2)^2+1 \quad 2 \times (-2) \times 1,$$

$$(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2}, 2^2+2^2 \quad 2 \times 2 \times 2, \dots$$

通过观察归纳,写出能反映这种规律的一般结论,并加以说明理由.

(2) 从 1 开始将连续奇数相加,和的情况有如下规律:

$$1=1^2, 1+3=4=2^2, 1+3+5=9=3^2,$$

$$1+3+5+7=16=4^2, 1+3+5+7+9=25=5^2.$$

按此规律,请你猜想从 1 开始,将前 10 个连续奇数(最后一个整数是 19 时)相加,其和是_____.



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

主题五

不等式和不等式组



主题概说

1. 不等式和不等式组是在掌握了一元一次方程(组)及其解法的基础上安排学习的,在学习过程中,要类比一元一次方程(组)的相关知识,既要注意不等式与方程在概念、性质、解法上的“相同”与“相通”之处,也要注意二者之间的本质区别.

2. 在学习中,要认真体会数轴的重要作用,同时利用观察、猜想、验证、计算、推理、归纳与交流等数学活动,逐步提高发现问题、解决问题的能力.

3. 解不等式的步骤:①去分母:通过不等式两边同乘分母的最小公倍数,化为整式不等式;②去括号:按照有理数中去括号的法则去括号,在去括号的过程中要注意符号的变化;③移项:将不等式中右边含未知数的项变号后移到左边,将左边的常数项变号后移到右边;④合并同类项:将不等式整理成 $ax > b$ 或 $ax < b$ 的形式;

⑤系数化1:两边都除以_____,将不等式化为 $x > \frac{b}{a}$ 或 $x < \frac{b}{a}$ 的形式,注意要根据 a 的符号决定不等号的方向是否改变.

4. 解不等式组的步骤:①分别求出不等式组中的各个不等式的解集;②利用数轴求出这些不等式的解集的_____,即这个不等式组的解集;如果各个不等式的解集没有公共部分,那么就说这个不等式组无解.

5. 列不等式或不等式组解应用题的步骤:①审:认真审题,分清已知量,未知量及其关系.在找题中不等关系时,要抓住题中的关键字眼,如“大于”“小于”“不大于”“不小于”“至多”“至少”等的含义;②设:设出适当的未知数;③列:根据题中的不等关系,列出不等式(组);④解:解出所列不等式(组)的解集;⑤答:写出

答案,并检验答案是否符合题意.

6. 注意事项:①要熟练掌握不等式的三个基本性质;②利用数轴表达不等式(组)解集时无等号(<或>)画_____圆圈,有等号(\leq 或 \geq)画_____圆圈;③解不等式(组)时,特别注意乘以或除以负数时要改变不等号的_____ ;④不等式(组)解出后,应当自觉养成检验的习惯;⑤列不等式(组)解应用题时,要注意实际问题中的隐含条件;还要注意已知量、未知量的单位要统一.



典例重温

【例1】利用不等式的性质解下列不等式,并在数轴上表示其解集:

$$(1) x-3 > -1; \quad (2) -2x \leq 6; \quad (3) -\frac{1}{2}x - 1 < 1; \quad (4) 3x - 2 < 5x + 2.$$

【点拨】利用不等式的基本性质对不等式进行变形,然后将解集在数轴上表示出来.

【解答】

【小结】不等式的三条性质是不等式变形的重要依据,性质1、2类似于等式性质,不等号方向不变,性质3中不等号的方向改变,这是最容易出现错误的地方.

【例2】解不等式组:
$$\begin{cases} x+8 < 4x-1, \\ \frac{1}{2}x \leq 8-\frac{3}{2}x, \end{cases}$$
 并在数轴上把解集表示出来.

【点拨】先分别求出每个不等式的解集,再借助数轴找它们解集的公共部分,这个公共部分即为该不等式组的解集.

【解答】

【小结】分别求出两个不等式的解集后,可以利用数轴确定解集的公共部分,也可利用口诀:大大取大,小小取小,大小小大中间找,大大小小解不了.

【例3】幼儿园有若干玩具分给小朋友,若每人分3件,那么还余59件;若每人分5件,则最后一个小朋友分不到5件,求这个幼儿园有多少件玩具?多少个小朋友?

【点拨】设小朋友有 x 人,玩具的数量为 $(3x+59)$ 件,“最后一个小朋友分不到5件”可理解为:如果最后一个小朋友也分到5件,则 $5x > 3x+59$;如果最后一个小朋友分到0件,则 $5(x-1) < 3x+59$,建立不等式组求解即可.

【解答】

【小结】列不等式解应用题,一是应建立不等式组的数学模型;二是注意根据实际问题的意义作出正确的解答,如本例中 x 为正整数.



一、选择题

1. 实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示,则下列式子中正确的是 ()

A. $a-c > b-c$

B. $a+c < b+c$

C. $ac > bc$

D. $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$



2. 不等式 $3x+2>-1$ 的解集是 ()

- A. $x>-\frac{1}{3}$ B. $x<-\frac{1}{3}$ C. $x>-1$ D. $x<-1$

3. 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x+1>0, \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上可表示为如图所示中的 ()



4. 不等式组 $\begin{cases} x-\frac{1}{2}>0, \\ 1-2x<3 \end{cases}$ 的解集为 ()

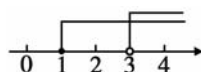
- A. $x>\frac{1}{2}$ B. $x<-1$ C. $-1<x<\frac{1}{2}$ D. $x>-\frac{1}{2}$

5. 不等式组 $\begin{cases} 3x\geq 9, \\ x<5 \end{cases}$ 的整数解共有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

6. 一个关于 x 的一元一次不等式组的解集在数轴上如图所示,则此不等式组的解集是 ()

- A. $x>1$ B. $x\geq 1$
C. $x>3$ D. $x\geq 3$



7. 如果不等式组 $\begin{cases} 2x-1>3(x-1), \\ x<m \end{cases}$ 的解集是 $x<2$,那么 m 的取值范围是 ()

- A. $m=2$ B. $m>2$ C. $m<2$ D. $m\geq 2$

8. 小宝和爸爸、妈妈三人在操场上玩跷跷板,爸爸体重为 69 千克,坐在跷跷板的一端,体重只有妈妈一半的小宝和妈妈同坐在跷跷板的另一端,这时爸爸的一端仍然着地. 后来小宝借来一副质量为 6 千克的哑铃,加在他和妈妈坐的一端,结果爸爸被跷起离开地面. 小宝体重可能是 ()

- A. 23.3 千克 B. 23 千克 C. 21.1 千克 D. 19.9 千克



二、填空题

9. 不等式 $2x+1>-5$ 的解集是_____.
10. 某公司打算至多用 1 200 元印刷广告单. 已知制版费为 50 元, 每印一张广告单还需支付 0.3 元的印刷费, 则该公司可印制的广告单数量 x (张) 满足的不等式为_____.
11. 某种商品的进价为 800 元, 出售时标价为 1 200 元, 后来由于该商品积压, 商店准备打折销售, 但要保证利润率不低于 5%, 则至多可打_____折.
12. 不等式 $4-3x\geq 2x-6$ 的非负整数解为_____.
13. 铁路部门规定旅客免费携带行李箱的长、宽、高之和不超过 160 cm. 某厂家生产符合该规定的行李箱, 已知行李箱的高为 30 cm, 长与宽的比为 3 : 2, 则该行李箱的长的最大值为_____ cm.
14. 不等式 $\frac{1+2x}{3}>x-1$ 和 $x+3(x-1)<1$ 的解集的公共部分是_____.
15. 不等式组 $\begin{cases} x-3(x-2)\leq 8, \\ 5-\frac{1}{2}x>2x \end{cases}$ 的整数解为_____.
16. 若不等式组 $\begin{cases} x+a\geq 0, \\ 1-2x>x-2 \end{cases}$ 有解, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 解不等式组 $\begin{cases} -3(x-2)\leq 4-x, \\ \frac{1+2x}{3}>x-1, \end{cases}$ 并把它解集在数轴上表示出来.

18. 求不等式组 $\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ \frac{x-1}{2} - \frac{2x-1}{3} < \frac{1}{3} \end{cases}$ 的整数解.

19. 从不等式: $2x-1 < 5$, $3x > 0$, $x-1 \geq 2x$ 中任取两个不等式, 组成一个一元一次不等式组, 解你所得到的这个不等式组, 并在数轴上表示其解集.



20*. 探究拓展题(供学有余力的同学选做).

某电脑经销商计划购进一批电脑机箱和液晶显示器,若购进电脑机箱 10 台和液晶显示器 8 台,共需要资金 7 000 元;若购进电脑机箱 2 台和液晶显示器 5 台,共需要资金 4 120 元.

(1) 每台电脑机箱、液晶显示器的进价各是多少元?

(2) 该经销商购进这两种商品共 50 台,而可用于购买这两种商品的资金不超过 22 240 元. 根据市场行情,销售电脑机箱、液晶显示器一台分别可获利 10 元和 160 元. 该经销商希望销售完这两种商品,所获利润不少于 4 100 元. 则该经销商有哪几种进货方案? 哪种方案获利最大? 最大利润是多少?



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

主题六

二次根式

主题概说

1. 二次根式的有关概念是二次根式化简与运算的基础,其中最重要的概念是最简二次根式.

最简二次根式就是满足下列条件的二次根式:

- (1) 被开方数不含 _____;
- (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

化简二次根式之后,被开方数 _____ 的二次根式叫做同类二次根式.

2. 二次根式的性质是二次根式化简与运算的根据. 二次根式的主要性质是:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0); \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0); \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$$

3. 在进行二次根式的化简与运算时,一般遵循以下方法:

(1) 先将其中的二次根式化简;

(2) 二次根式的乘法可以参照多项式乘法进行,运算中要运用公式 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} =$ _____ ($a \geq 0, b \geq 0$);

(3) 对于二次根式的除法,通常是先写成分式的形式,然后通过分母有理化进行运算,有时可以利用约分,有时可以利用公式 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} =$ _____ ($a \geq 0, b > 0$);

(4) 二次根式的加减法与多项式的加减法类似,是在化简的基础上去括号与合并同类二次根式;

(5) 运算结果一般要化成最简二次根式.

典例重温

【例1】计算下列各题:

$$(1) \left(\sqrt{\frac{4}{7}} \right)^2; (2) (\sqrt{2a+3})^2 \left(a \geq -\frac{3}{2} \right); (3) \sqrt{36^2}; (4) \sqrt{\left(-3\frac{1}{7} \right)^2}.$$

【点拨】(1)、(2)要利用 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 及 $(ab)^2 = a^2 b^2$ 计算,注意符号的处理.(3)、(4)中,当 $a \geq 0$ 时,直接用公式 $\sqrt{a^2} = a$ 计算;当 $a < 0$ 时,利用 $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ 计算.

【解答】

【小结】(1) $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 表明:一个非负数的算术平方根的平方还是这个数,这个式子反过来可以写成 $a = (\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$,它表明一个非负数可以写成它的算术平方根的平方的形式.

(2)公式 $(\sqrt{a})^2 = a$ 中 $a \geq 0$,公式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 中 a 可取一切实数.在运算时,先将 $\sqrt{a^2}$ 转化为 $|a|$,然后利用绝对值的意义分 $a \geq 0$ 和 $a < 0$ 两种情况讨论.

【例2】计算下列各题:

$$(1) \sqrt{\frac{1}{4}} \times \sqrt{144}; (2) 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{8}; (3) 5\sqrt{x} \cdot 6\sqrt{x^3}; (4) -2\sqrt{0.27} \times \sqrt{0.03}.$$

【点拨】能直接运用二次根式乘法法则计算的可直接运用公式,但要注意化简;形如 $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d}$ 的计算,通常用乘法的交换律和结合律进行变形,将根号外的 a, c 相乘,根号内的 b, d 相乘的积作为被开方数,再将根号外的因式的积与根号部分相乘.

【解答】

【小结】(1)两个二次根式相乘,如果积中有开得尽方的一定要开方.(2)当二次根式前面有系数时,可类比单项式与单项式相乘的法则,如 $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$ ($b \geq 0, d \geq 0$),即系数与系数相乘作为积的系数,被开方数与被开方数相乘作为积的被开方数.

【例3】计算：

- (1) $\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{8})$; (2) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{6})\div 2\sqrt{3}$; (3) $(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-3)$;
 (4) $(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})$; (5) $(\sqrt{5}+2)^2$; (6) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

【点拨】根据单项式乘多项式，多项式乘多项式，多项式除以单项式法则及乘法公式进行计算.

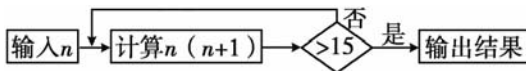
【解答】

【小结】(1)二次根式的混合运算顺序与整式混合运算顺序一样，先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的；(2)在二次根式的运算中，多项式乘法法则和乘法公式仍然适用.



一、选择题

- 函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围为 ()
 A. $x>2$ B. $x\geq 2$ C. $x<2$ D. $x\leq 2$
- 若 a, b 为实数，且 $|a+1|+\sqrt{b-1}=0$ ，则 $(ab)^{2023}$ 的值是 ()
 A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1
- 计算 $\sqrt{(-3)^2}$ 的结果是 ()
 A. -3 B. 3 C. -9 D. 9
- 下列各数中，与 $\sqrt{3}$ 的积为有理数的是 ()
 A. $\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2-\sqrt{3}$
- 下列计算错误的是 ()
 A. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ B. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ C. $\sqrt{12}\div\sqrt{3}=2$ D. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
- 按如图所示的程序计算，若开始输入的 n 值为 $\sqrt{2}$ ，则最后输出的结果是 ()
 A. 14 B. 16
 C. $8+5\sqrt{2}$ D. $14+\sqrt{2}$



7. 如果 $\sqrt{(2a-1)^2} = 1-2a$, 则 ()

A. $a < \frac{1}{2}$

B. $a \leq \frac{1}{2}$

C. $a > \frac{1}{2}$

D. $a \geq \frac{1}{2}$

8. 观察下列前三个式子: $\sqrt{3^2-1} = \sqrt{2} \times \sqrt{4}$, $\sqrt{4^2-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$, $\sqrt{5^2-1} = \sqrt{4} \times \sqrt{6}$, \dots , 按照这样的规律第 10 个式子的结果是 ()

A. $\sqrt{9} \times \sqrt{11}$

B. $\sqrt{10} \times \sqrt{12}$

C. $\sqrt{11} \times \sqrt{13}$

D. $\sqrt{12} \times \sqrt{14}$

二、填空题

9. 当 $x \leq 0$ 时, $\sqrt{x^2} =$ _____.

10. 下列二次根式: $\sqrt{4x}$, $\sqrt{x^2-2}$, $\sqrt{3x^2}$, $\sqrt{\frac{x}{2}}$, 其中最简二次根式有 _____ 个.

11. 如果最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{17-2a}$ 能够合并, 则 $a =$ _____.

12. 已知 $\sqrt{12-n}$ 是正整数, 则实数 n 的最大值为 _____.

13. 方程 $\sqrt{2}x = 1$ 的解是 $x =$ _____.

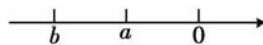
14. 长方形的长为 $(\sqrt{2023} + \sqrt{15})$ cm, 宽为 $(\sqrt{2023} - \sqrt{15})$ cm, 则其面积为 _____ cm^2 .

15. 计算: $\sqrt{12} - \sqrt{\frac{3}{4}} =$ _____.

16. 观察分析下列数据: $0, -\sqrt{3}, \sqrt{6}, -3, 2\sqrt{3}, -\sqrt{15}, 3\sqrt{2}, \dots$, 根据数据排列的规律得到第 16 个数据应是 _____ (结果需化简).

三、解答题

17. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示, 化简 $|a-b| - \sqrt{a^2}$.



18. 一个三角形的三边长分别为 $5\sqrt{\frac{x}{5}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{20x}$, $\frac{5}{4}x\sqrt{\frac{4}{5x}}$.

(1) 求它的周长(要求结果化简);

(2) 请你给出一个适当的值,使它的周长为整数,并求出此时三角形周长的值.

19. 计算:

$$(1) \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{3}};$$

$$(2) (\sqrt{48} - \sqrt{75}) \times \sqrt{1\frac{1}{3}}.$$

20. 先化简,再求值: $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})-a(a-6)$, 其中 $a=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

21. 求值:

(1) 已知 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$, 求 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 的值;

(2) 设 x, y 是实数, 且 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$, 求 $\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y)^2}}$ 的值.

22. 观察下列各式及验证过程.

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2 + \frac{2}{3}}.$$

$$\text{验证: } 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2^3}{3}} = \sqrt{\frac{(2^3 - 2) + 2}{2^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2(2^2 - 1) + 2}{2^2 - 1}} = \sqrt{2 + \frac{2}{3}}.$$

$$3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{3 + \frac{3}{8}}.$$

$$\text{验证: } 3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{3^3}{8}} = \sqrt{\frac{(3^3 - 3) + 3}{3^2 - 1}} = \sqrt{\frac{3(3^2 - 1) + 3}{3^2 - 1}} = \sqrt{3 + \frac{3}{8}}.$$

(1) 按照上述两个等式及验证过程的基本思路, 猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果, 并进行验证;

(2) 针对上述各式反映的规律, 写出用 n (n 为任意自然数, 且 $n \geq 2$) 表示的等式, 并说明它成立的原因.

23*. 探究拓展题(供学有余力的同学选做).

观察下列分母有理化计算.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-\sqrt{1}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}, \dots$$

从计算结果中找出规律,并利用这一规律计算:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,022}} \right) (\sqrt{2\,023}+1).$$



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

预习知新篇

假日导学 “凡事预则立，不预则废。”学习也如此，我们结合下学期的学习要求和假期特点，为你创设了2个富含趣味的情境预习主题，这些内容主要是下学期教材中重要章节的知识内容.后面还适当配置了少量习题，旨在激发你对下学期数学学习的期待与向往，为下一阶段的学习做好准备.



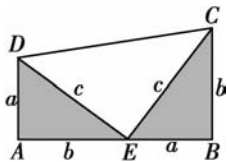
勾股定理及逆定理



勾股定理被誉为“几何学的基石”，是初等几何中的一个基本定理.所谓勾股定理，就是指在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方.这个定理有十分悠久的历史，几乎所有文明古国（希腊、中国、埃及、巴比伦、印度等）对此定理都有所研究.勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊数学家兼哲学家毕达哥拉斯首先发现的.但毕达哥拉斯对勾股定理的证明方法已经失传.我国是最早了解勾股定理的国家之一.有一位美国总统也证明过勾股定理，他就是加菲尔德总统，而他是怎样接触勾股定理的呢？据说事情经过是这样的：在1876年一个周末的傍晚，在美国首都华盛顿的郊外，有一位中年人正在散步，欣赏黄昏的美景，他就是当时美国俄亥俄州共和党议员加菲尔德.他走着走着，突然发现附近的一个小石凳上，有两个小孩正在聚精会神地谈论着什么，时而大声争论，时而小声探讨.由于好奇心驱使，加菲尔德循声向两个小孩走去，想搞清楚两个小孩到底在干什么.只见一个小男孩正俯着身子用树枝在地上画着一个直角三角形.于是，加菲尔德便问他们在干什么，只见那个小男孩头也不抬地说：“请问先生，如果直角三角形的两条直角边分别为3和4，那么斜边长为多少呢？”加菲尔德答道：“是5呀.”小男孩又问道：“如果两条直角边分别为5和7，那么这个直角三角形的斜边长又是多少？”加菲尔德不假思索地回答到：“那斜边的平方一定等于5的平方加上7的平方.”小男孩又说道：“先生，你能说出其中的道理吗？”加菲尔德一时

语塞,无法解释了,心里很不是滋味.于是加菲尔德不再散步,立即回家,潜心探究小男孩给他留下的难题.他经过反复的思考与演算,终于弄清楚了其中的道理,并给出了简洁的证明方法.

以 a, b 为直角边,以 c 为斜边作两个全等的直角三角形,则每个直角三角形的面积等于 $\frac{1}{2}ab$. 把这两个直角三角形拼成如图所示形状,使 A, E, B 三点在一条直线上.



$$\therefore \text{Rt} \triangle EAD \cong \text{Rt} \triangle CBE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BEC.$$

$$\therefore \angle AED + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle DEC \text{ 是一个等腰直角三角形, 它的面积等于 } \frac{1}{2}c^2.$$

$$\text{又} \because \angle DAE = 90^\circ, \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\therefore ABCD \text{ 是一个直角梯形, 它的面积等于 } \frac{1}{2}(a+b)^2.$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b)^2 = 2 \times \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2.$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

你能试着证明吗?

勾股定理在生活中也是十分有用的,例如对那些无法直接测出的高度或距离很有帮助,应用于工业设计和模型生产,对我们的生产生活有很大的帮助,但它一般都运用于数学之中,很少在生产中崭露头角.其逆定理的主要作用是判定一个三角形是否为直角三角形,若满足 $a^2 + b^2 = c^2$,则可知此三角形为直角三角形,否则就不是.勾股定理的发现与证明都是十分精彩的,在历史长河中,勾股定理是全世界人的伟大发现.



典例精析

【例1】(1)7,24,25;(2)8,15,19;(3)0.6,0.8,1.0;(4) $3n,4n,5n$ ($n>1$,且为自然数).上面各组数中,勾股数有_____组. ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解析】判断勾股数要看两个条件,一看能否满足 $a^2+b^2=c^2$,二看是否都是正整数.这两者缺一不可.

(1) $\because 7^2+24^2=25^2$,且7,24,25都是正整数, \therefore 7,24,25是勾股数.

(2) $\because 8^2+15^2 \neq 19^2$, \therefore 8,15,19不是勾股数.

(3) \because 0.6,0.8,1.0不是正整数, \therefore 0.6,0.8,1.0不是勾股数.

(4) $\because (3n)^2+(4n)^2=25n^2=(5n)^2$ ($n>1$,且为自然数),且它们都是正整数, $\therefore 3n,4n,5n$ ($n>1$,且为自然数)是勾股数.故选B.

【例2】阅读下面内容后,请回答下面的问题:

学习勾股定理有关内容后,老师请同学们交流讨论这样一个问题:“已知直角三角形 ABC 的两边长分别为3和4,请你求出第三边.”同学们经片刻的思考与交流后,张雨同学举手说:“第三边长是5.”王宁同学说:“第三边长是 $\sqrt{7}$.”还有一些同学也提出了不同的看法……假如你也在课堂上,你的意见如何?为什么?

【点拨】本题中虽然给出了直角三角形的两边是3,4,而没有指出它们一定是直角边或斜边,所以本题应该分情况讨论:当3,4是直角边时;当3与所求的第三边是直角边,4是斜边时.可求出两种情况的解.

【解析】(1)当3,4是直角边时,第三边等于 $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

(2)当3与所求的第三边是直角边,4是斜边时,第三边等于 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$.

所以本题的答案应该是 $\sqrt{7}$ 或5.

【例3】在 $\triangle ABC$ 中, $AB=13,AC=15$,高 $AD=12$,则 $\triangle ABC$ 的周长为多少?

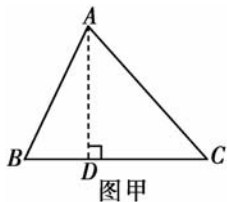
【点拨】可以对三角形的形状进行分类,不同的形状高线的位置不同:锐角三角形的高线在三角形的内部,钝角三角形的高线在三角形的外部,而 BC 求解随高线位置的不同而不同.所以必须分类来讨论三角形的形状.

【解析】(1)如图甲,如果该三角形是锐角三角形,则 BC 边上的高线在 $\triangle ABC$ 内部.

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 为直角三角形.

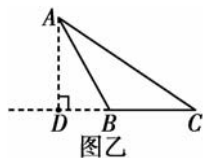


在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $AB=13$, $AD=12$, 由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AC=15$, $AD=12$, 根据勾股定理得 $DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$. $\therefore BC=BD+DC=5+9=14$.

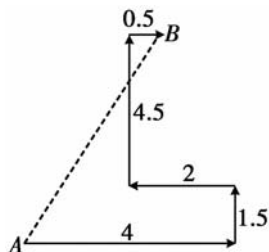
$\triangle ABC$ 的周长 $=AB+BC+CA=13+15+14=42$.

(2)如图乙,如果该三角形是钝角三角形, BC 边上的高线在 $\triangle ABC$ 外部,同理可得:



$BC=DC-BD=9-5=4$, $\triangle ABC$ 的周长 $=AB+BC+CA=13+4+15=32$.

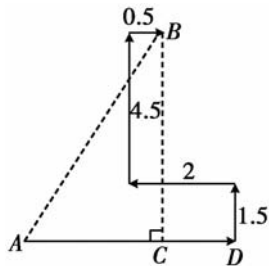
【例 4】如图所示,某人到岛上去探宝,从 A 处登陆后先往东走 4 km,又往北走 1.5 km,遇到障碍后又往西走 2 km,再转向北走到 4.5 km 处往东一拐,仅走 0.5 km 就找到宝藏.问登陆点 A 与宝藏埋藏点 B 之间的距离是多少?



【点拨】本题需要把实际问题转化为数学模型,过点 B 作过点 A 的直线的垂线,构造直角三角形,利用勾股定理完成.

【解析】过点 B 作 $BC \perp AD$ 于 C , 则 $AC=4-2+0.5=2.5(\text{km})$, $BC=6(\text{km})$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,由勾股定理求得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2.5^2+6^2}=6.5(\text{km})$.



所以登陆点 A 与宝藏埋藏点 B 之间的距离是 6.5 km.

【例5】如果一个三角形的三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 338 = 10a + 24b + 26c$, 试说明这个三角形是直角三角形.

【点拨】本题需要将已知等式进行变形, 配成完全平方式, 求出 a, b, c 的值, 然后再说明.

【解析】将式子变形, 得 $a^2 + b^2 + c^2 + 338 - 10a - 24b - 26c = 0$, 即 $a^2 - 10a + 25 + b^2 - 24b + 144 + c^2 - 26c + 169 = 0$. 整理, 得 $(a-5)^2 + (b-12)^2 + (c-13)^2 = 0$.

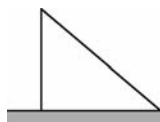
因此 $a-5=0, b-12=0, c-13=0, \therefore a=5, b=12, c=13$.

$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 = c^2, \therefore$ 这个三角形是直角三角形.



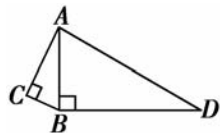
小试身手

- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, a = 12, b = 16$, 则 c 的长为 ()
A. 26 B. 18 C. 20 D. 21
- $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别是 $a, b, c, AB = 8, BC = 15, CA = 17$, 则下列结论中不正确的是 ()
A. $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 AC 为斜边 B. $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$
C. $\triangle ABC$ 的面积是 60 D. $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 $\angle A = 60^\circ$
- 等边三角形的边长为 2, 则该三角形的面积为 ()
A. $4\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3
- 已知 a, b, c 是三角形的三边长, 如果满足 $(a-6)^2 + \sqrt{b-8} + |c-10| = 0$, 则三角形的形状是 ()
A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 钝角三角形 D. 直角三角形
- $\triangle ABC$ 中, $AB = 13, AC = 15$, 高 $AD = 12$, 则 BC 的长为 ()
A. 14 B. 4 C. 14 或 4 D. 以上都不对
- 木工师傅要做一个长方形桌面, 做好后量得长为 80 cm, 宽为 60 cm, 对角线为 100 cm, 则这个桌面_____ (填“合格”或“不合格”).
- 如图, 已知一根长 8 m 的竹竿在离地 3 m 处断裂, 竹竿顶部抵着地面, 此时, 顶部距底部有_____ m.



8. 如图, $\angle C = \angle ABD = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, $BD = 12$, 则 $AD =$

_____.

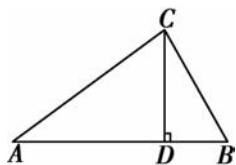


9. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$ 于 D , $AC = 20$, $BC = 15$, $DB = 9$.

(1) 求 DC 的长;

(2) 求 AB 的长;

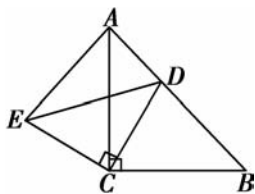
(3) 求 $\angle ACB$ 的度数.



10. 如图, $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, D 为 AB 边上一点, 求证:

(1) $\triangle ACE \cong \triangle BCD$;

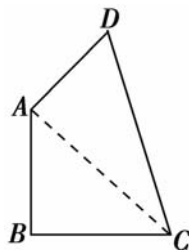
(2) $AD^2 + DB^2 = DE^2$.



11. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=1$, $CD=\sqrt{3}$, $DA=1$,且 $\angle B=90^\circ$. 求:

(1) $\angle BAD$ 的度数;

(2) 四边形 $ABCD$ 的面积. (结果保留根号)



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					



变化多样的四边形



情境预习

四边形是最常见的图形之一,在生产和生活中有着广泛的应用.我们常用特殊四边形的相关知识来解决一些实际问题.一位小姐在商店里看到一块漂亮的方纱巾,非常想买.当她拿起来看时感觉纱巾不是很方.商店老板看她犹豫的样子,马上过来拉起一组对角,让小姐看另一组是否对齐?小姐还有些疑惑,老板又拉起另一组对角,让小姐检验,小姐终于买下了这块纱巾.你认为小姐买的这块纱巾是正方形的吗?经过两次检验,能说明这块方巾的对角和边有什么关系吗?不难发现,经过两次验证可以说明这块纱巾的两组对角分别相等,四边都相等.而事实上:四边相等的四边形是菱形.(菱形的判定定理)也就是说,上面的那位小姐买的那块方巾不一定是正方形.那到底满足什么条件的菱形是正方形呢?

有一个角是直角的菱形是正方形.

对角线相等的菱形是正方形.

由上面的判定定理可知,要判定一个四边形是正方形,先判定一个四边形是菱形.

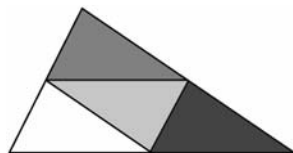
那么判定一个四边形是菱形的方法又有哪些呢?

菱形的定义:一组邻边相等的平行四边形是菱形.

菱形的判定定理:对角线垂直的平行四边形是菱形.

由上面可知,要判定一个四边形是菱形,可以先判定一个四边形是平行四边形.那么判定一个四边形是平行四边形的方法又有哪些呢?我们在小学学过平行四边形的定义:有两组对边分别平行的四边形是平行四边形.那除了定义之外还有别的方法吗?如果你的手中有些小木条,你能通过适当的测量、剪割,做成一个平行四边形的框架吗?动手试试看,你不难发现有两组对边相等的四边形是平行

四边形. 你还可以动手剪四个全等的不等边的三角形拼成如右的大三角形, 你能指出其中所有的平行四边形吗?



由以上的探究, 你不难得出, 一组对边平行且相等的四边形也是平行四边形.

平行四边形的判定定理 1: 有两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

平行四边形的判定定理 2: 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

平行四边形的判定定理 3: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

当然特殊的四边形除了平行四边形、菱形和正方形之外还有矩形、等腰梯形. 对矩形、等腰梯形的定义和判定定理有兴趣的同学也可以先预习.



典例精析

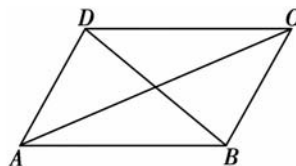
【例 1】小明在学习了正方形之后, 给同桌小文出了道题, 从下列四个条件: ① $AB=BC$, ② $\angle ABC=90^\circ$, ③ $AC=BD$, ④ $AC \perp BD$ 中选两个作为补充条件, 使 $\square ABCD$ 为正方形 (如图), 现有下列四种选法, 你认为其中错误的是 ()

A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ②④



【解析】利用矩形、菱形、正方形间的联系与区别, 结合正方形的判定方法分别判断得出即可.

A. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当① $AB=BC$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形, 当② $\angle ABC=90^\circ$ 时, 菱形 $ABCD$ 是正方形, 故此选项正确;

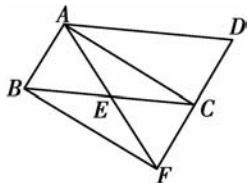
B. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当② $\angle ABC=90^\circ$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是矩形, 当③ $AC=BD$ 时, 这是矩形的性质, 无法得出四边形 $ABCD$ 是正方形, 故此选项错误;

C. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当① $AB=BC$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形, 当③ $AC=BD$ 时, 菱形 $ABCD$ 是正方形, 故此选项正确;

D. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当② $\angle ABC=90^\circ$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是矩形, 当④ $AC \perp BD$ 时, 矩形 $ABCD$ 是正方形, 故此选项正确.

故选 B.

【例2】如图,已知 E 是 $\square ABCD$ 中 BC 边的中点,连接 AE 并延长 AE 交 DC 的延长线于点 F .



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle FCE$;

(2) 连接 AC, BF , 若 $\angle AEC = 2\angle ABC$, 求证: 四边形 $ABFC$ 为矩形.

【解析】(1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB \parallel DC, \therefore \angle ABE = \angle ECF$.

又 $\because E$ 为 BC 的中点, $\therefore BE = CE$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FCE$ 中,
$$\begin{cases} \angle ABE = \angle FCE, \\ BE = CE, \\ \angle AEB = \angle FEC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE$ (ASA).

(2) 证明: $\because \triangle ABE \cong \triangle FCE, \therefore AB = CF$.

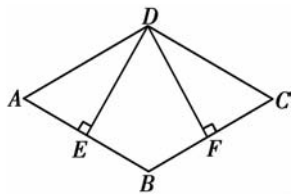
又 $AB \parallel CF, \therefore$ 四边形 $ABFC$ 为平行四边形. $\therefore BE = EC, AE = EF$.

又 $\because \angle AEC = 2\angle ABC$, 且 $\angle AEC$ 为 $\triangle ABE$ 的外角,

$\therefore \angle AEC = \angle ABC + \angle EAB. \therefore \angle ABC = \angle EAB. \therefore AE = BE$.

$\therefore AE + EF = BE + EC$, 即 $AF = BC. \therefore$ 四边形 $ABFC$ 为矩形.

【例3】如图,已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $DE \perp AB, DF \perp BC$, 垂足分别是 E, F , 并且 $DE = DF$. 求证:



(1) $\triangle ADE \cong \triangle CDF$;

(2) 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【解析】(1) 证明: $\because DE \perp AB, DF \perp BC, \therefore \angle AED = \angle CFD = 90^\circ$.

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore \angle A = \angle C$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CDF$ 中,
$$\begin{cases} \angle AED = \angle CFD, \\ \angle A = \angle C, \\ DE = DF, \end{cases} \therefore \triangle AED \cong \triangle CDF \text{ (AAS).}$$

(2) 证明: $\because \triangle AED \cong \triangle CDF, \therefore AD = CD$.

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形.



1. 下列条件中能判断四边形是平行四边形的是 ()

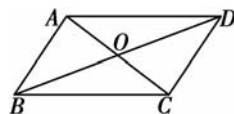
- A. 对角线互相垂直 B. 对角线相等
C. 对角线互相垂直且相等 D. 对角线互相平分

2. 在下列给出的条件中,能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()

- A. $AB \parallel CD, AD = BC$ B. $\angle A = \angle B, \angle C = \angle D$
C. $AB = CD, AD = BC$ D. $AB = AD, CB = CD$

3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 相交于点 O .

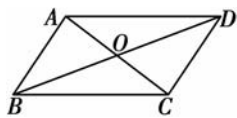
(1) 若 $AD = 8 \text{ cm}, AB = 4 \text{ cm}$,那么当 $BC = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}, CD = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$ 时,四边形 $ABCD$ 为平行四边形;



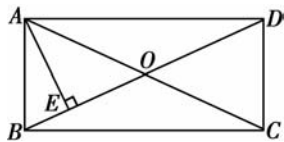
(2) 若 $AC = 10 \text{ cm}, BD = 8 \text{ cm}$,那么当 $AO = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}, DO = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$ 时,四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

4. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,(1) $AB \parallel CD$; (2) $AD \parallel BC$; (3) $AD = BC$; (4) $AO = OC$; (5) $DO = BO$; (6) $AB = CD$. 选择两个条件,能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的共有 对.

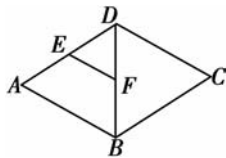
5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,过点 A 作 $AE \perp BD$,垂足为点 E ,若 $\angle EAC = 2\angle CAD$,则 $\angle BAE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



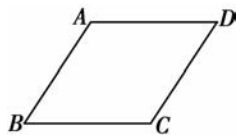
第 4 题图



第 5 题图



第 6 题图

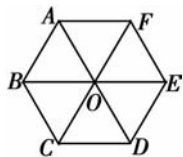


第 7 题图

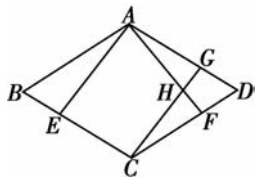
6. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AD, BD 的中点,若 $EF = 2$,则菱形 $ABCD$ 的周长是 .

7. 如图,菱形 $ABCD$ 的周长是 8 cm , AB 的长是 cm .

8. 小明用手中的六个全等的正三角形做拼图游戏时,拼成一个六边形.你能在图中找出所有的平行四边形吗?并说说你的理由.



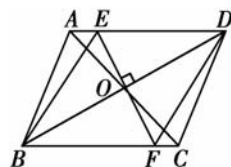
9. 如图,已知在菱形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 上的点,且 $CE = CF$.
- (1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$;
 - (2) 过点 C 作 $CG \parallel EA$ 交 AF 于 H ,交 AD 于 G ,若 $\angle BAE = 25^\circ$, $\angle BCD = 130^\circ$,求 $\angle AHC$ 的度数.



10. 如图,已知四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC, BD 相交于点 O , 且 $OA = OC, OB = OD$, 过 O 点作 $EF \perp BD$, 分别交 AD, BC 于点 E, F .

(1) 求证: $\triangle AOE \cong \triangle COF$;

(2) 判断四边形 $BEDF$ 的形状, 并说明理由.



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对_____题 错_____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

假期自主检测与评价

时量:100 分钟 满分:120 分

一、选择题(每小题 3 分,共 30 分)

1. 36 的平方根是 ()

- A. ± 6 B. 6 C. ± 36 D. 36

2. 计算 $3\sqrt{2}-\sqrt{2}$ 等于 ()

- A. 3 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

3. 当 $x < 0$ 时, $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ 的值为 ()

- A. -1 B. 1 C. ± 1 D. x

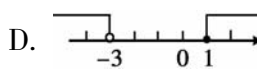
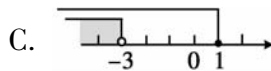
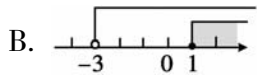
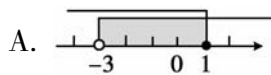
4. 若分式 $\frac{2-|x|}{x+2}$ 的值是零,则 x 的值是 ()

- A. $x=0$ B. $x=\pm 2$ C. $x=-2$ D. $x=2$

5. 若 $a < b$,则下列各式中一定成立的是 ()

- A. $a-1 < b-1$ B. $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ C. $-a < -b$ D. $ac < bc$

6. 不等式组 $\begin{cases} 2x+1 \leq 3, \\ x > -3 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



7. 某玩具厂生产一种玩具,甲车间计划生产 500 个,乙车间计划生产 400 个,甲车间每天比乙车间多生产 10 个,两车间同时开始生产且同时完成任务. 设乙车

间每天生产 x 个,可列方程为

()

A. $\frac{400}{x-10} = \frac{500}{x}$

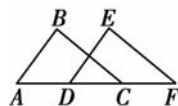
B. $\frac{400}{x} = \frac{500}{x+10}$

C. $\frac{400}{x+10} = \frac{500}{x}$

D. $\frac{400}{x} = \frac{500}{x-10}$

8. 如图,已知点 A, D, C, F 在同一条直线上, $AB = DE, BC = EF$, 要使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 还需要添加一个条件是

()



A. $\angle B = \angle E$

B. $\angle BCA = \angle F$

C. $BC \parallel EF$

D. $\angle A = \angle EDF$

9. 在下列说法中,正确的是

()

A. 如果两个三角形全等,那么它们必是关于直线成轴对称的图形

B. 如果两个三角形关于某直线成轴对称,那么它们是全等三角形

C. 等腰三角形的对称轴是底边中线

D. 一条线段是关于经过该线段中点的直线成轴对称的图形

10. 下列运算正确的是

()

A. $6\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{3a}$

B. $-2\sqrt{3} = \sqrt{(-2)^2 \times 3}$

C. $a^2 \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}$

D. $\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2}$

二、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

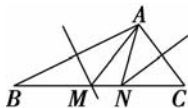
11. 若 $\sqrt{x+2}$ 有意义,则 x 的取值范围是_____.

12. 计算 $(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) =$ _____.

13. 若最简二次根式 $\sqrt{2x-5}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式,则 $x =$ _____.

14. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-a \geq 0, \\ 5-2x > 1 \end{cases}$ 只有四个整数解,则实数 a 的取值范围是_____.

15. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $BC=9$, AB 的垂直平分线交 BC 于点 M , AC 的垂直平分线交 BC 于点 N ,则 $\triangle AMN$ 的周长=_____.



16. 已知等腰三角形的一个角为 42° ,则它的底角度数为_____.
17. 如果某中学生的步行速度是每小时 6 km ,他家距离学校 3 km ,学校要求早晨 $7:30$ 前到校,则他最晚_____从家出发才能不迟到.
18. 若 m, n 为实数,且 $|2m+n-1|+\sqrt{m-2n-8}=0$,则 $(m+n)^{2023}$ 的值为_____.
19. 对于非零的两个实数 a, b ,规定 $a\oplus b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$,若 $2\oplus(2x-1)=1$,则 x 的值为_____.
20. 小明用下面的方法求出方程 $2\sqrt{x}-3=0$ 的解,请你仿照他的方法,求出方程 $2\sqrt{x+1}-4=0$ 的解,并把你的解答过程填写在下面的表格中.

方程	换元法得新方程	解新方程	检验	求原方程的解
$2\sqrt{x}-3=0$	令 $\sqrt{x}=t$,则 $2t-3=0$	$t=\frac{3}{2}$	$t=\frac{3}{2}>0$	$\sqrt{x}=\frac{3}{2}$,所以 $x=\frac{9}{4}$
$2\sqrt{x+1}-4=0$	令 $\sqrt{x+1}=t$ 则			

三、解答题(共60分)

21. (本题6分)计算:

$$\sqrt{12}+4\sqrt{1\frac{1}{2}}-(\sqrt{3-\frac{9}{4}}-\sqrt{24}).$$



22. (本题 10 分) 若 $\sqrt{x-2y+9}$ 与 $|x-y-3|$ 互为相反数, 求 $x+y$ 的值.

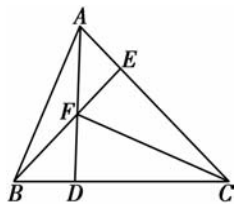
23. (本题 10 分) 求使方程组 $\begin{cases} x+y=m+2, \\ 4x+5y=6m+3 \end{cases}$ 的解 x, y 都是正数的 m 的取值范围.

24. (本题 10 分) 某校决定为全校数学教师每人购买一本《义务教育数学课程标准》(以下简称《标准》), 同时每人配套购买一本《义务教育数学课程标准解读》(以下简称《解读》). 其中《解读》的单价比《标准》的单价多 25 元. 若学校购买《标准》用了 378 元, 购买《解读》用了 1 053 元, 请问《标准》和《解读》的单价各是多少元?

25. (本题 12 分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$, $AD \perp BC$ 于 D , CF 交 AD 于点 F , 连接 BF 并延长交 AC 于点 E , $\angle BAD = \angle FCD$. 求证:

(1) $\triangle ABD \cong \triangle CFD$;

(2) $BE \perp AC$.



26. (本题 12 分) 阅读材料:

小明学习二次根式后,发现一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方,如 $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. 善于思考的小明进行了以下探索:设 $a+b\sqrt{2}=(m+n\sqrt{2})^2$ (其中 a, b, m, n 均为整数),则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$. $\therefore a=m^2+2n^2, b=2mn$. 这样小明就找到了一种类似于 $a+b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法. 请你仿照小明的方法探索并解决下列问题:

(1) 当 a, b, m, n 均为正整数时,若 $a+b\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$,用含 m, n 的式子分别表示 a, b ,得 $a=$ _____, $b=$ _____.

(2) 利用所探索的结论,找一组正整数 a, b, m, n 填空:

$$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}\sqrt{3} = (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}\sqrt{3})^2;$$

(3) 若 $a+4\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$,且 a, m, n 均为正整数,求 a 的值.



互动评价

	学习时间	作业质量	学习态度	学习效果	我的疑惑
自我评价		对____题 错____题	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	<input type="checkbox"/> 好 <input type="checkbox"/> 良好 <input type="checkbox"/> 一般	
家长评价					

◎开场白

启程：向着梦想生活出发

令人期待的假日终于来啦！暂别紧张的校园生活，我们回到家庭，拥抱自然，走进社会，开始体验自主、轻快、多彩的假日生活。

你可以选择去登山，去感怀登临绝顶时一览众山小的气势；你可以选择去看海，在一望无际的蔚蓝中领略海纳百川的胸怀；你还可以选择去滑雪，在银装素裹的白色大地中感受冬日的清丽……

假日里，你可以欣赏优秀的影片，可以聆听优美的歌曲，可以伴着茶香品读好书；你可以去参加社区或乡镇的各种文体活动，或者走上街头体察生活，或者深入乡间采撷民风……

在你朝着梦想生活出发的旅程里，一定还要有《假日知新》的陪伴。

这是一本生动活泼、寓教于乐的生活体验之书，一本多元互动、学用结合的特色假期作业。浓郁的生活气息和自主的探知精神是她的灵魂。

数学欣赏 带你欣赏四大“数学王子”的真实故事，感悟大师们为追求数学真谛而孜孜不倦、忘我执着的情怀。

数说天下 为你展现一片多彩生活的天空，让你学会用数据关注社会生活。

数字探秘 从数学角度，教你解开数字背后隐藏着的许许多多无法解释的谜团。

数学感悟 为你创编了一组富含意蕴的数学故事，让你透过数学故事真切感悟数学真谛。

生活实践 选取与生活密切相关的素材，教你如何应用所学知识进行科学探究和正确理财……

——有了她，你将更加乐意走进生活，培养捕捉美的能力，用自己的智慧去发现生活之美。

——有了她，你会感觉生活处处皆学问，在生活与学习的互动中，你的所学必将发光发亮。

——有了她，你会觉得生活探索新奇而美好，有机会验证书本知识并进一步优化你的生活。

愿《假日知新》陪伴着你，一路上充满奇迹，充满发现。

数学是科学的皇后

德国数学家高斯有句名言：“数学是科学的皇后。”看到这句话，有些同学可能会问：科学的国王又是谁呢？其实科学的皇后或者国王都是数学，因为数学是所有自然科学的基础，所有社会科学的研究方法都需要使用数学。在国际象棋中，威力最大的棋子就是皇后，它不但可以像中国象棋里的“车”那样横着走或竖着走，还可以和“象”那样斜着走，一步可以走很多格，而国王一步只能走一格，由此可见皇后在国际象棋里的重要性，正因为如此，才有了“数学是科学的皇后”这句名言。

下面为你介绍世界数学历史上最杰出的四大“数学王子”。

大王子当属古希腊的阿基米德，出生于公元前287年。关于他，有一个很著名的故事。当时的国王让金匠做了一顶新的纯金皇冠，但他怀疑金匠在皇冠中掺了银子。可是，做好的皇冠无论从重量上、外形上都看不出问题。国王把这个难题交给了阿基米德。阿基米德日思夜想。一天，他去澡堂洗澡，当他慢慢坐进澡盆时，水从盆边溢了出来，他望着溢出来的水，突然大叫起来：“我找到了！找到了！”他竟然一丝不挂地跑回家中。原来他想出办法了。



阿基米德把皇冠放进一个装满水的缸中，一些水溢出来了。他取出皇冠，把水装满，再将一块同皇冠一样重的金子放进水里，又有一些水溢出来。他把两次的水加以比较，发现第一次溢出的水多于第二次。于是他断定皇冠中掺了银子。国王看了实验，没有弄明白，让阿基米德给解释一下。阿基米德说：“一千克的木头和一千克的铁比较，木头的体积大。如果分别把它们放入水中，体积大的木头排

出的水量，比体积小的铁排出的水量多。我把这个道理用在皇冠上。因为金子的密度大，而银子的密度小，因此同样重的金子和银子，必然是银子的体积大于金子的体积。刚才的实验表明，皇冠排出的水量比金块多，说明皇冠的体积比金块的体积大，这就证明皇冠不是用纯金制造的。”阿基米德有条理的讲述，使国王信服了。实验结果证明，那个工匠私吞了黄金。

这次实验的意义远远大过查出金匠欺骗国王。他为此而发现了浮力原理，后人以阿基米德的名字命名这条原理。一直到现代，人们还在利用这个原理测定船舶载重量等。除此之外，他还发现了著名的杠杆原理。伴随着这一发明，还产生了一句众所周知的名言：“只要给我一个支点，我就能撬起地球。”由于阿基米德孜孜不倦、刻苦钻研，终于成为古希腊伟大的哲学家、数学家和物理学家。

二王子是英国的牛顿，出生于1643年，他是举世公认的、有史以来最伟大的科学家之一。牛顿的幼年充满了辛酸，在他出生前3个月父亲便去世了，之后母亲改嫁，他是由外婆抚养成人的。一谈到牛顿，人们可能认为他小时候一定是个“神童”“天才”，有着非凡的智力。其实不然，牛顿童年身体瘦弱，头脑并不聪明。在家乡读书的时候，他很不用功，在班里的学习成绩属于次等。因为学习成绩不好，他经常受到其他同学的歧视。有一次课间游戏，大家正玩得兴高采烈的时候，一个学习好的同学故意踢了牛顿一脚，并骂他笨蛋。牛顿的心灵受到这种刺激，愤怒极了。他想：我俩都是学生，我为什么受他的欺负？我一定要超过他！从此，牛顿下定决心，发奋读书。他早起晚睡，抓紧分秒、勤学苦思。经过刻苦钻研，牛顿的学习成绩不断提高，不久就超过了曾欺侮过他的那个同学，名列班级前茅。23岁时，牛顿从著名的剑桥大学毕业并留校工作，后来因为逃避伦敦流行的鼠疫来到母亲的农场里。相传有一天，在一棵苹果树下，一个熟透了的苹果掉下来砸在牛顿头上，他便开始思索为什么苹果会垂直落在地上，而不是飞到天上去呢？一定是有一种力在拉它，那么这种拉力会不会也控制月球呢？

可为什么月亮又不会掉下来呢？最后通过不断研究终于得出了著名的万有引力定律。

三王子叫欧拉，1707年出生于瑞士。欧拉小时候就特别喜欢数学，不满10岁就开始自学《代数学》。这本书连他的几位老师都没读过，可小欧拉却读得津津有味，遇到



不懂的地方，就用笔作个记号，事后再向别人请教。他 13 岁就进巴塞尔大学读书，这在当时是个奇迹，曾轰动了数学界。小欧拉是这所大学，也是整个瑞士大学校园里年龄最小的学生。坐在教室最前排的欧拉个子比别人矮一头，总是目不转睛地认真听课。别人把他当成孩子，谁也不把他放在眼里。一次，教授讲课中顺便提到当时数学家们尚未解决的一个大难题。哪知一下课欧拉递给他一份答案。教授看着这份构思精巧又大胆的还不够完备的答案，几乎不敢相信是出自这个小男孩之手。他立刻拉住欧拉的手，口里不住地夸奖着：“你有希望成为未来的数学巨人！”从此，在这位教授的精心指导下，他努力学习，勤奋研究，在数学领域中得心应手，突飞猛进。两年后的夏天，欧拉获得巴塞尔大学的学士学位，次年，16 岁的欧拉又获得巴塞尔大学的哲学硕士学位。

欧拉渊博的知识，无穷无尽的创造经历和空前丰富的著作，都是令人惊叹不已的！他从 19 岁开始发表论文，直到 76 岁，半个多世纪写下了浩如烟海的书籍和论文，可以说欧拉是科学史上最多产的一位杰出的数学家。据统计，他那不倦的一生共写下了 886 本书籍和论文，其中分析、代数、数论占 40%，几何占 18%，物理和力学占 28%，天文学占 11%，弹道学、航海学、建筑学等占 3%。彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了 47 年。

四王子是德国数学家高斯，出生于 1777 年。高斯 10 岁时，有一次小学老师出了一道算术难题： $1+2+3+\cdots+97+98+99+100=?$ 老师心里正想，这下子小朋友一定要算到下课了吧！正要借口出去时，却被高斯叫住了！原来高斯已经算出来了。高斯告诉大家他是怎么算出的：先算 $1+100=101$ ， $2+99=101\cdots$ 这样一共有 50 个 101，所以答案很快就可以求出来了： $101\times 50=5\ 050$ 。高斯小的时候就能将难题变得简单，是因为他懂得观察，善于寻求规律，化难为简，这是值得我们学习的。



在我们的印象中，牛顿好像只是大物理学家，其实不然，他其实也是位有名的数学家，他与德国数学家莱布尼茨共同发明了微积分。有关他数学方面的贡献，请你上网搜索一下，详细地了解其人其事。

数说天下

科技
视界

“数”看梦天实验舱

►2022年10月31日，梦天实验舱发射任务取得圆满成功，这是我国空间站建造的关键之战。11月3日，梦天实验舱成功完成转位，空间站“T”字基本构型在轨组装完成，向着建成空间站的目标迈出了关键一步。



梦天实验舱设计在轨寿命不小于**10**年，轴向长约**17.9**米，结构最大外径超过**4**米，发射质量约**23**吨。梦天实验舱可为航天员提供约**32**立方米的的活动空间。中国空间站可实现长期**3**人，短期**6**人驻留。向空间站源源不断地输送电能的是我国自主创新研制的柔性太阳翼，它的单片长度**27**米，面积可达**138**平方米，厚度不到**1**毫米，它的日发电量相当于一个普通家庭一个月的用电量。

湖南5分钟下线一台挖掘机



◀2022年10月19日，二十大新闻中心举行第三场集体采访。湖南省委常委、宣传部部长杨浩东表示，湖南**10**秒钟可以生产一台铝轮毂，**80**秒钟可以生产一台发动机，**5**分钟可以下线一台挖掘机。

源自湖南的北斗卫星导航系统定位、轨迹等核心技术，彰显着“中国高度”；湖南参与研究轨道交通**605**公里的试验速度，彰显着“中国速度”；全球最大直径盾构机、全球最长臂架泵车等彰显着“中国强度”；海牛二号深海钻机在**2000**米海底打下**231**米的钻孔，彰显着“中国深度”。此外，湖南在工业领域攻克填补国内空白技术**200**多项，构建起“**1**个国家级+**11**个省级”制造业创新中心。

文体
视窗

三星堆纪录片《不止考古》收官，评分9.8



►2022年11月17日，某视频网站自制纪录片《不止考古·我与三星堆》正式收官，新兴创作手法与独特风格让考古日常变得平易近人，妙趣横生，赢得受众好评连连，站内获**9.8**分，铸就纪录片高口碑。

1986年，四川省广汉市西北三星堆一、二号祭祀坑的发现，可谓“一醒惊天下”。2019年，三星堆开始新一轮考古勘探，并在祭祀区发现**6**座新的祭祀坑。截至2022年9月，**6**座新发现的祭祀坑出土编号文物**15109**件，近完整器**4060**件，其中包括了三星堆迄今为止发现的**最大青铜面具、体量巨大的青铜神兽以及各种造型奇特、充满想象力的青铜神坛等。**

18岁高中生5天夺4金

►“钰”汝于成神枪手，“千”锤百炼始成金！来自四川南充的**18**岁运动员庞钰千在2022国际射联世界射击锦标赛表现突出，一举拿下青年组**50**米步枪卧射混合团体、**50**米步枪三姿个人赛、**50**米步枪三姿团体、**50**米步枪三姿混合团体**4**枚金牌。射击一直是四川体育的传统强项，四川省陆上运动学校曾培养出张山、曹逸飞、刘天佑、兰兴等奥运冠军、世界冠军。而仍是一名高三的学生庞钰千，凭着自己努力和热爱，在开罗世锦赛的赛场上掀起了一场属于自己的青春风暴。



世界人口达到80亿

►2022年11月15日，联合国宣布，世界人口在这天达到**80亿**。联合国网站“**80亿人口日**”栏目介绍说，这是人类发展史上的一个里程碑。全球人口增长归功于公共卫生、营养、个人卫生以及医药的改善使人类寿命逐渐延长。另外，一些国家的高生育率也推动了人口快速增长。联合国秘书长古特雷斯在2022年“世界人口日”的讲话中曾表示，我们庆祝人类的多样性，彰显彼此共同的人性。为人类在延长寿命和降低妇幼死亡率方面取得的进步感到惊叹。在庆祝的同时，人类也应该铭记对地球的共同责任。我们有共同的责任保护这颗星球。



生活

视

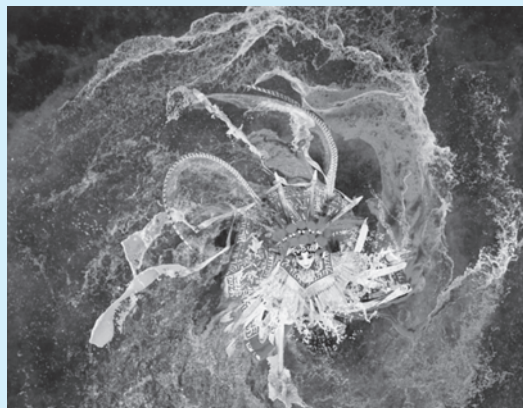
角

东北首个核能供暖项目供热，惠及2万居民



◀在寒冷的冬季，我国北方供暖主要用煤、天然气、电等方式来取暖。这个冬天，辽宁大连红沿河镇开启了核电供暖新时代。2022年11月1日，辽宁红沿河核电站核能供暖示范项目正式投运供热，该项目是我国东北地区首个核能供暖项目，覆盖辽宁大连瓦房店市红沿河镇，可惠及当地近**2万**居民。该项目规划供热面积**24.24**万平方米，最大供热负荷为**12.77**兆瓦，利用红沿河核电站汽轮机抽汽作为热源，替代原有的**12**个燃煤锅炉房，实现红沿河镇清洁供暖。每年将减少标煤消耗**5726**吨，减排二氧化碳**1.41**万吨、烟尘**209**余吨、二氧化硫**60**余吨、氮氧化物**85**余吨、灰渣**2621**吨，将有效改善供暖区域大气环境，环保效益显著。

团队耗时1年用上亿颗水滴再现传统京剧



◀ 深圳某**40**余人的团队耗时**1**年，依靠灵动洒脱的京剧动作、恣意柔美的水花效果，创作了一段动画视频，营造出独特的“中国之美”。为了兼顾画面中衣服、动作的美感，团队对京剧动作进行重新编排，同时

采用了**600**多个动捕点，完成了对京剧演员高速运动的动捕数据采集。在拍摄结束之后，特效与合成也用了**10**个月的时间精细完成。导演邓博弘表示，京剧是中国传统文化的经典代表之一，它的服装、动作、声音处处体现着中国人的美学造诣。而水又是柔软的、优美的，是表现京剧的动作、颜色的延展最适合的元素。所以他想用现代的影像技术赋予它们新活力，用与时俱进的方式来提高年轻人对传统文化的兴趣。

天下第一银杏树美了4000年

▶ 浮来山又名浮丘，位于莒县城西**6**千米处，海拔**298.9**米，面积**20**平方千米。这里冬暖夏凉，气候宜人，有“天然森林氧吧”之称，是夏季避暑胜地，冬季休闲佳处。2022年11月1日，浮来山上的“天下银杏第一树”迎来最佳观赏期。挂满金黄树叶的树枝，错落交替，枝枝相扣，绘织成一把巨大的“伞”，笼罩着古老的定林寺。据悉，该银杏树树龄约**4 000**年，高**26.7**米，干粗**15.7**米，**8**人伸展双臂方能合围，占地**600**多平方米，至今仍枝繁叶茂，生机盎然，被誉为植物“活化石”。



数字探秘

神奇的数字: 142857



在埃及尼罗河畔，开罗城近郊的广袤沙漠中，巍然耸立着一群巨大的方锥形建筑物——金字塔，气势威严，历经沧桑。金字塔因形体极似汉字的“金”字，因此在中国被称为“金字塔”。在欧洲则称为“底拉米斯”，是古埃及语“高”的意思。

关于金字塔，有太多的未知。从建筑的精准到图拉古迹的探索，从狮身人面像之谜到秘密通道和完整的船，等等，其中最神奇难解的是金字塔蕴藏的数字谜团。

一组神奇的数字：在埃及金字塔内，发现一组看似平凡但很神奇的数字——142857，这组数字背后隐藏着无法解释的谜团。为什么说它最神奇呢？

我们把它分别乘以 1 到 6 看看：

$$142857 \times 1 = 142857 \quad 142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571 \quad 142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285 \quad 142857 \times 6 = 857142$$

我们惊奇地发现：同样的数字，只是调换了位置，反复地出现。

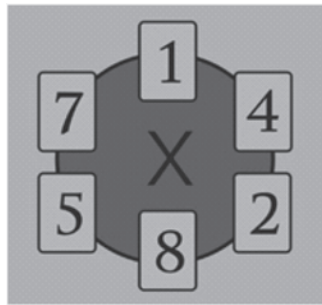
那么把它乘以 7 后是多少呢？我们会惊奇地发现是：999999。

而 $142 + 857 = 999$ ， $14 + 28 + 57 = 99$ 。

最后，我们用 142857 乘以 142857 得数是多少呢？

答案是：20408122449。

这个数的前五位 + 后六位的得数又是多少呢？ $20408 + 122449 = 142857$ 。结果竟然又是 142857，真是太神奇了！



再往下看：拿 142857 除以 7 时，

$$142857/7=20408.142857142857142857142857\cdots$$

再拿 1~14 除以 7 时，

$$1/7=0.142857142857142857(\text{循环节数是 } 142857)$$

$$2/7=0.285714285714285714(\text{循环节数是 } 285714)$$

$$3/7=0.428571428571428571(\text{循环节数是 } 428571)$$

$$4/7=0.571428571428571428(\text{循环节数是 } 571428)$$

$$5/7=0.714285714285714285(\text{循环节数是 } 714285)$$

$$6/7=0.857142857142857142(\text{循环节数是 } 857142)$$

$$7/7=1$$

$$8/7=1.142857142857142857(\text{循环节数是 } 142857)$$

$$9/7=1.285714285714285714(\text{循环节数是 } 285714)$$

$$10/7=1.428571428571428571(\text{循环节数是 } 428571)$$

$$11/7=1.571428571428571428(\text{循环节数是 } 571428)$$

$$12/7=1.714285714285714285(\text{循环节数是 } 714285)$$

$$13/7=1.857142857142857142(\text{循环节数是 } 857142)$$

$$14/7=2$$



通过观察、比较，我们发现：① $\frac{1}{7} \sim \frac{6}{7}$ 的结果的循环节竟然和 142857 分别乘以 1~6 后的结果一样。② $\frac{8}{7} \sim \frac{13}{7}$ 的循环节和 $\frac{1}{7} \sim \frac{6}{7}$ 的循环节也一样。

这是一种巧合，还是背后隐藏着不为人知的秘密？值得我们去探究。

不仅如此，还有更为神奇的呢。我们来看看轮值过程：

$$142857 \times 1 = 142857 (\text{原数字}) \quad 142857 \times 2 = 285714 (\text{轮值})$$

$$142857 \times 3 = 428571 (\text{轮值}) \quad 142857 \times 4 = 571428 (\text{轮值})$$

$$142857 \times 5 = 714285 (\text{轮值}) \quad 142857 \times 6 = 857142 (\text{轮值})$$

$$142857 \times 7 = 999999 (\text{放假由 9 代班})$$

$$142857 \times 8 = 1142856 (7 \text{ 分身，即分为头一个数字 1 与尾数 6，数列内少了 7})$$

$$142857 \times 9 = 1285713 (4 \text{ 分身}) \quad 142857 \times 10 = 1428570 (1 \text{ 分身})$$

$$142857 \times 11 = 1571427 (8 \text{ 分身}) \quad 142857 \times 12 = 1714284 (5 \text{ 分身})$$

$$142857 \times 13 = 1857141 (2 \text{ 分身}) \quad 142857 \times 14 = 1999998 (9 \text{ 也需要分身变大})$$

它是一组神奇数字，它证明一星期有 7 天，我们来看看这组神奇的数字的变化规律：它自我累加一次，就由它的 6 个数字，依顺序（即末尾数 7,4,1,8,5,2）轮值一次，到了第 7 天，它们就放假，由 999999 去代班，数字越加越大，每超过一星期就轮回，每个数字需要分身一次，你不需要计算器，只要知道它的分身方法，就可以知道继续累加的答案。

我们再仔细观察以上各数，可能还有更大的发现，藏着一个更大的秘密呢！

以上面的金字塔神秘数字举例： $1+4+2+8+5+7=27$ ， $1+8=4+5=2+7=9$ 。你瞧瞧，它们的单个数字的和竟然都是“9”。依此类推，上面各个神秘数，它们的单数和都是“9”。奇不奇怪！（它的各数和 27 还是 3 的三次方）无数巧合中必有概率，无数吻合中必有规律。何谓规律？大自然规定的纪律！科学就是总结事实，从中找出规律。它还有更神奇的地方等待你去发掘哟！也许，它就是宇宙的密码，如果你发现了它的真正神奇秘密，请与大家分享！



埃及是一个神秘的国度，从狮身人面像到金字塔，这里有太多太多的神奇！我们不得不感叹人类的智慧真的是无尽的！请你查找有关资料，或上网搜索其他数字之谜，或许你能得到意想不到的收获。

数学感悟

数学是什么，远远比数学怎么学更加重要。只有准确地把握数学学科的本质特点，才能有效地学好数学。

我们知道数学的三大特性，即抽象性、严密性和应用广泛性，但在学科培训、课堂研究中，一方面我们必须从数学三大特性的高度理性地认识数学，另一方面我们需要对数学的特点有着更具体、更鲜活、更有意蕴的理解。于是我们在收集采撷的基础上改编新创了一组关于数学的精粹而有意蕴的故事，意即透过数学故事真切地感悟数学的真谛。

透过数学

感悟

数学真谛

故事

故事 1

两只羊的描述

草地上有两只羊，在艺术家、生物学家、物理学家、数学家看来却有不同的感受与理解，下面是他们的描述。

艺术家：“蓝天、碧水、绿草、白羊，美哉自然。”

生物学家：“雄雌一对，生生不息。”

物理学家：“大羊静卧，小羊漫步。”

数学家：“ $1+1=2$ 。”

感悟

从故事中不同职业的人对两只羊的描述，我们感受到艺术家对自然美的关注，生物学家对生命的关注，物理学家对运动与静止的关注，而数学家从色彩、性别、状态中抽象出数量关系： $1+1=2$ 。这是数学高度抽象性的体现。

在数学学习中，我们要经历具体—表象—抽象的过程，学习时要在直观物体和抽象概念之间构建桥梁，把握事物最主要、最本质的数学属性。

抽象有一个学生自己经历的过程，而不是直接告诉学生抽象的结果。数学的抽象程度是一个不断提高的历史过程，这一过程永无止境。

故事 2

烧水的问题

有人提出这样一个问题：“假如你面前有煤气灶、水龙头、水壶，你想烧些水应当怎样去做？”

被提问者答道：“在壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上。”

提问者肯定了这一回答，接着追问：“若其他条件不变，只是水壶中已有足够的水，那你又应当怎样去做？”

这时被提问者很有信心地答道：“点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上。”

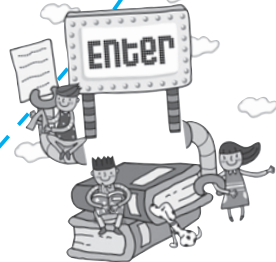
但是提问者说：“物理学家通常都这么做，而数学家们则会倒去壶中的水，并声称已把后一问题转化成先前的问题。”

感悟

数学家“倒去壶中的水”似乎是多此一举，故事的编创者不是要我们去“倒去壶中的水”，而是引导我们感悟数学家独特的思维方式——转化。

学习数学不是问题解决方案的累积记忆，而是学会把未知的问题转化成已知的问题，把复杂的问题转化成简单的问题，把抽象的问题转化成具体的问题。数学的转化思想简化了我们的思维状态，提升了我们的思维品质，“转化”不是就事论事、一事一策，而是发掘出问题中最本质的核心和原型，再把新问题转化成与老问题一样具有的核心和原型，从而顺利地解决它。

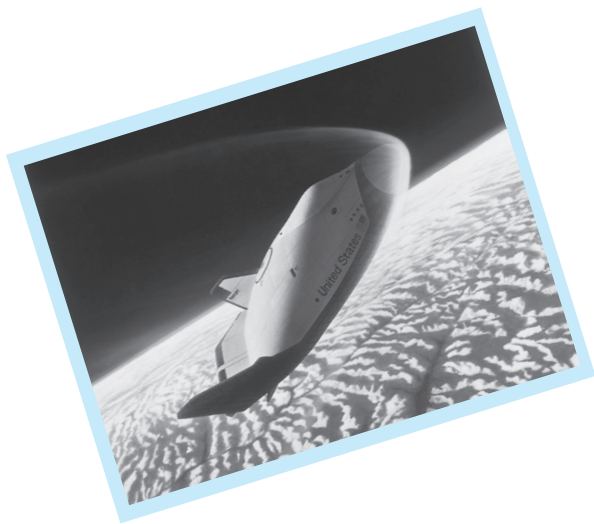
转化思想是数学的基本思想，它应贯穿我们数学学习的始终。



数学案例

一个小数点

★☆☆与一场大悲剧



1967年8月23日，苏联电视台正转播著名宇航员费拉迪米尔·科马洛夫一个人驾驶着“联盟一号”宇宙飞船的返航实况。当飞船返回大气层后，科马洛夫无论怎么操作也无法使降落伞打开以减慢飞船的速度。地面指挥中心采取了一切可能的措施帮助排除故障，但都无济于事。经请示中央，决定将实况向全国人民公布。电视台的播音员以沉重的语调宣布：“‘联盟一号’飞船由于无

法排除故障，不能减速，两小时后将在着陆基地附近坠毁。我们将目睹宇航英雄科马洛夫遇难。”

科马洛夫的亲人被请到指挥台，指挥中心的首长通知科马洛夫与亲人通话。科马洛夫控制着自己的激动：“首长，属于我的时间不多了，我先把这次飞行的情况向您汇报……”生命在一分一秒中消逝，科马洛夫目光泰然，态度从容，他整整汇报了几分钟。汇报完毕，国家领导人接过话筒宣布：“我代表最高苏维埃向你致以崇高的敬礼，你是苏联的英雄，人民的好儿子……”当问及科马洛夫有什么要求时，科马洛夫眼含热泪：“谢谢，谢谢最高苏维埃授予我这个光荣称号，我是一名字航员，为祖国的宇航事业献身，我无怨无悔！”

领导人把话筒递给科马洛夫的老母亲，母亲老泪纵横，心如刀绞，泣不成声。她把话筒递给科马洛夫的妻子。科马洛夫给妻子送来一个调皮而又深情的飞吻。妻子拿着话筒只说了一句话：“亲爱的，我好想你！”就泪如雨下，再也说

不出话了。科马洛夫12岁的女儿接过话筒，泣不成声。科马洛夫微笑着说：“女儿，你要坚强，不要哭。”“我不哭，爸爸，你是苏联的英雄，我是你的女儿，我一定会坚强地生活。”刚毅的科马洛夫不禁落泪了，他叮嘱孩子：“要记住这个日子，以后每年的这个日子要到坟前献一朵花，向爸爸汇报学习情况。”

永别的时刻到了——飞船坠地，电视图像消失。整个苏联一片肃静，人们纷纷走向街头，向着飞船坠毁的地方默默地哀悼。

同学们，读到这里，你是否被这悲壮的场面所感染了！“联盟一号”当时发生的一切，就是因为地面检查时，忽略了一个小数点。让我们记住这一个小数点所酿成的大悲剧吧！



此文对你今后的学习与生活有何启示？请你写一写自己的感受吧。



伽罗华 (Galois, 1811—1832) 是法国数学家, 19 世纪杰出的数学天才, 生于法国巴黎近郊布伦的一个小村子里, 因决斗而卒于巴黎。

数

学

家

巧破

杀

人

案

鲁柏是数学家伽罗华的好友。一天, 伽罗华得知鲁柏被刺的不幸消息, 急忙奔赴探询。女看门人告诉伽罗华, 警察已勘察过现场, 没有发现其他线索, 只是看到鲁柏手里紧捏着半块没有吃完的苹果馅饼, 令人费解。她认为作案人可能就在公寓内, 因为案发前后, 她一直在传达室, 没有看见有人进公寓来。可是这座四层楼的公寓, 每层有15间房, 住着100多人, 情况比较复杂, 这可能是警察到目前还未能破案的原因。

伽罗华思索着。最后, 请女看门人带他到三楼, 在314号房门前停了下来, 问道: “这房间是谁住的?” 女看门人答道: “米塞尔。”

“这人怎样?”

“他爱赌钱, 好喝酒, 昨天已经搬走了。”

“这个米塞尔就是杀人凶手!” 伽罗华肯定地说。

女看门人非常惊奇, 忙问: “有什么根据?”

伽罗华分析说: “鲁柏手里的馅饼就是一条线索。馅饼英语叫Pie, 而希腊语Pie就是 π , 即通常说的圆周率。人们在计算时, 常取 π 的近似值3.14。鲁柏是一位喜欢数学, 善于思考的人, 临死时他终于想到用馅饼来暗示凶手所住的房间。”

根据伽罗华的分析, 警方经过侦察, 最后逮捕了米塞尔。经审讯, 米塞尔承

认因赌博输钱，看到鲁柏家里汇来巨款，遂生杀机。

伽罗华从小就受到良好的家庭教育。童年时代，他在母亲的辅导下进行学习。12岁进入中学读书。起初，他努力学习希腊语和拉丁语。后来，他对数学产生了浓厚的兴趣，以惊人的速度读了许多数学著作。19岁时，他的数学天才被他的数学教师发现，在老师的指导下，他深入研究了一些数学理论，并取得了划时代意义的成果。伽罗华在巴黎高等师范学校读书时，因参加政治斗争，公开反对国王制度，揭露了校长在法国七月政变中的两面行为，又得罪了校长。伽罗华被学校开除，并两次入狱。监狱生活严重摧残了他的健康。1832年，伽罗华出狱后，在一所疗养院治疗，由于政治和爱情的纠葛，他又陷进政敌为他设置的一个陷阱，在一次决斗中，他身负重伤，第二天便离开了人世。

伽罗华是一位杰出的数学天才，可惜他在人世间仅活了21个春秋！他的早逝，无疑是世界数学界的一大损失。



请你上网搜索伽罗华的相关资料，了解其人及其主要成就。

生活实践

“百十钱穿彩线长，分来再枕自收藏。商量爆竹谈箫价，添得娇儿一夜忙。”它讲的是压岁钱。过去，人们认为给孩子压岁钱可以逢凶化吉，得到它就可平平安安地度过一岁。而现在，压岁钱更多的是长辈表达对孩子的疼爱。那么收到压岁钱后，同学们怎样消费压岁钱呢？

让我们一起来了解一下吧。



具体怎样做？

制作问卷调查表，了解同学们往年的压岁钱来源、数目、消费去向，今年压岁钱打算如何消费。

与家长、同伴交流，了解哪些开支是必要的，有意义的。

提出合理消费压岁钱的建议。

谈谈本次调查情况的收获与感悟。

初中生如何消费压岁钱 情况调查

教你几招，学做理财达人。

招数一 交学费。（可以减轻家长的经济负担，培养自立精神和家庭责任感）

招数二 献爱心。（拿出一部分来帮助其他贫困孩子，助人为乐）

招数三 表孝心。（给长辈或孤寡老人买礼物，养成敬老爱老的美德）

招数四 搞投资。（在银行开个账户，进行教育储蓄）

招数五 买书报。（可以开阔眼界，又可以与同学交流阅读、增进友谊）

招数六 去旅游。（增长知识，陶冶情操）

招数七 买保险。（为自己解除医疗费、学费等后顾之忧）